

Technische Universität Ilmenau
Fakultät für Mathematik
und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

Postfach 10 0565
98684 Ilmenau
Germany
Tel.: 03677/692652
Fax: 03677/691241
Telex: 33 84 23 tuil d.
email: W.Neundorf@mathematik.tu-ilmenau.de

Preprint No. M 09/99

**Hinweise zu
tableauartigen Strukturen
in T_EX und L^AT_EX**

Werner Neundorf

März 1999

[‡]MSC (1991): 65-01, 65-05, 65A05

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Matrizen, Vektoren	3
2.1	Quelltexte	8
3	Tabellen, Tableaus	14
3.1	Quelltexte	32
4	Schemata	47
4.1	Quelltexte	54
5	Symbole, Formeln	61
5.1	Symbole und Befehle im L ^A T _E X-Layout	61
5.2	Formeln	68
5.3	Quelltexte zu den Formeln	69
6	Hinweise zu den Skriptfiles	69

Literatur

1 Einleitung

\LaTeX findet breite Anwendung in den mathematischen Wissenschaften, speziell in den Bereichen der numerischen Analysis und Informatik. Es gibt gute Gründe, um mit diesem Textverarbeitungssystem zu arbeiten.

- Mathematische Formeln können einfach erzeugt werden. \TeX hat ein weites Spektrum, um mathematische Sachverhalte in gut lesbarer Form darzustellen.
- Formeln und Referenzen können markiert werden, Referenzierungen erfolgen automatisch.
- Das `.tex` File wird als ASCII File notiert, so daß es auch mit anderen Texteditoren leicht erzeugt werden kann.
- \LaTeX steht an vielen Universitäten und Forschungseinrichtungen zu Verfügung. Es läuft gleichermaßen auf PC's, Workstations und Großrechnern.

Das Skript ist eine Einführung in das Programm \LaTeX mit dem Ziel der Erstellung mathematischer Dokumente, speziell **tableauartiger Strukturen**. Es ist gedacht für Studenten und Mitarbeiter, aber auch für andere \LaTeX -Nutzer kann es von Interesse sein. Eine empfohlene Variante zum Erlernen von \LaTeX ist das Studium von Beispielen und Dokumenten, wenn notwendig auch das Zurateziehen von Handbüchern wie im Literaturverzeichnis.

\LaTeX is widely used in the mathematical sciences, particularly in the numerical analysis and computer science communities. Good reasons for learning \LaTeX include the following.

- A lot of formulas can be produced quite easily. \TeX knows a great deal about the way to format mathematics, and hence your documents will look good.
- Equations and references can be labelled, so cross-referencing is automated.
- The `.tex` files are standard ASCII files, and hence they can be produced using a favourite text editor.
- \LaTeX is available at many universities and research institutions, and can be run PC's, workstations and mainframe computers.

The script briefly introduces the \LaTeX system for typesetting mathematical documents, especially **table structures**. It was written for students and colleagues, the contents may be of interest to other \LaTeX ers. One of the best ways to learn about \LaTeX is to study examples of \LaTeX documents and, when necessary, to consult reference books such as those listed at the end.

Key words: tutorial aspects, experimental papers, tables

MSC (1991): 65-01, 65-05, 65A05

2 Matrizen, Vektoren

- $Ax = b$, $A = A(n, n) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- **Gleichungssystem** $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$

Gestaffeltes System: $Bx = c$ mit oberer Dreiecksmatrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Grundidee: Darstellung von A als Produkt $A = -CB$ mit unterer Dreiecksmatrix

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & -1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Determinante: $\det C = (-1)^n \neq 0$

- **Matrix-Vektor-Form eines Gleichungssystems** $Au = e$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad e = [1, 1, 1]^T$$

Determinante von A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

- **Vollständige LU-Zerlegung** von $A = (a_{ij})$ mit unterer bzw. oberer Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Cholesky**

$$A = LL^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & 8 \\ & & 3 \end{pmatrix}, \quad \det A = \prod_{i=1}^3 l_{ii}^2 = 36$$

- **Permutationsmatrix**

Bsp.: $n = 20$, $p = (10, 9, 11, 1, \dots)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- **Boothroyd/Dekker-Matrix**

$$a_{ij} = \binom{n+i-1}{i-1} \binom{n-1}{n-j} \frac{n}{i+j-1} \in \mathbb{N}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$A^{-1} = (a'_{ij}), \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$$

$$n = 6, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ 21 & 70 & 105 & 84 & 35 & 6 \\ 56 & 210 & 336 & 280 & 120 & 21 \\ 126 & 504 & 840 & 720 & 315 & 56 \\ 252 & 1050 & 1800 & 1575 & 700 & 126 \\ 462 & 1980 & 3465 & 3080 & 1386 & 252 \end{pmatrix}$$

- **Wilkinsonmatrix**

$$A = \begin{pmatrix} 0.9143 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0.8762 & 0.7156 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0.7943 & 0.8143 & 0.9504 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0.8017 & 0.6123 & 0.7165 & 0.7123 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

- **Matrix mit Blockstruktur**

$$A = A(14, 14), \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_1 \end{pmatrix}, \quad A_1(7, 7), \quad B(7, 7), \quad C(7, 7)$$

$$A_1 = (a)_{ij}, \quad B = (b)_{ij}, \quad b_{ij} = a_{8-i,j}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 5 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 12 & 8 & 7 & 8 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 10 & 9 & 8 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & 9 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 9 & 10 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 10 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 5 & 9 & 10 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & 5 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & 6 & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & 7 & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matrixtransformation**

$$A' = D_1 A D_2, \quad D_1 = D_2 = \text{diag}(d_i), \quad d_i > 0$$

$$A' = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise bei DV für RWA

$$\boxed{A_h u_h = b_h} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{A u = b} \quad \text{mit}$$

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_h = \begin{pmatrix} f_1 + \varphi_0/h^2 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \varphi_1/h^2 \end{pmatrix}$$

- **Eigenwerte von Tridiagonalmatrizen**

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b & & \dots & 0 & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \end{pmatrix} = \text{tridiag}(c, a, b)$$

$$\lambda_i = \begin{cases} a, & \text{falls } b c = 0 \\ a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}} \cos \frac{i\pi}{n+1}, & \text{falls } b c > 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- $N \times N$ **Tridiagonalmatrix**

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & c & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{bmatrix}$$

$$\lambda_i = a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{i\pi}{N+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- **Koeffizientenmatrix mit Bandgestalt**

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ -1 & 1 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 & 1 & -1 \\ \mathbf{0} & & & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

- **Bandmatrizen**

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \mathbf{0} \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & d_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \mathbf{0} \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & c_n & a_n \end{pmatrix} = \text{tridiag}(c_i, a_i, b_i)$$

- **Blockstruktur**

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

- **Charakteristisches Polynom der Tridiagonalmatrix**

$$p_n(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ c_1 & a_2 - \lambda & b_2 & 0 & \cdots & \\ 0 & c_2 & a_3 - \lambda & b_3 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & \cdots & 0 & c_{n-2} & a_{n-1} - \lambda & b_{n-1} \\ & & \cdots & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n - \lambda \end{pmatrix}$$

Notation des Polynoms in der Normalform

$$F_n = p_n(\lambda) = (-1)^n (q_n \lambda^n + q_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + q_1 \lambda + q_0), \quad q_n = 1$$

Berechnung des Funktionswertes

Die Entwicklung der Determinante nach der letzten Spalte und dann nach der letzten Zeile führt auf die rekursive Formel (3-Term-Rekursion)

$$F_n = (a_n - \lambda)F_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}F_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad F_0 = 1, \quad F_1 = a_1 - \lambda$$

• Newtonverfahren

NV für Systeme von n nichtlinearen Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{J}(x^{(i)})\delta x^{(i)} &= -f(x^{(i)}) \\ x^{(i+1)} &= x^{(i)} + \delta x^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots \leq i_{max}, \quad x^{(0)} \text{ gegeben} \end{aligned}$$

\mathbf{J} - Jacobimatrix der partiellen Ableitungen von $f(x)$

$$\begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \dots & \partial f_2 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \partial f_n / \partial x_2 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} x^{(0)} & \text{- Startvektor} \\ i > i_{max} \text{ oder } \|f(x^{(i)})\| < \varepsilon & \text{- Abbruchbedingung} \\ i_{max} & \text{- maximale Iterationszahl} \\ \varepsilon & \text{- Toleranz} \end{array}$$

• Differenzenverfahren für Anfangsrandwertaufgabe

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{D}^{n+1} &= \mathbf{U}^n \\ \mathbf{U}^{n+1} &= 2\mathbf{D}^{n+1} - \mathbf{U}^n \end{aligned} \right\}$$

mit $(M-1) \times (M-1)$ Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1+r & -\frac{1}{2}r & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2}r & 1+r & -\frac{1}{2}r & & \\ 0 & -\frac{1}{2}r & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2}r \\ 0 & & & -\frac{1}{2}r & 1+r \end{bmatrix}$$

2.1 Quelltexte

```

\section{Matrizen, Vektoren}
\begin{itemize}
\item {\bf Ax = b, ~ A=A(n,n) = $(a_{ij})_{i,j=1}^n, ~a_{ij}, b_i \in \{\Bbb R\}$}
\[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, ~i=1,2,\dots,n \]
\[\left(
\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{array}
\right)
\left(
\begin{array}{c}
x_1 \\
x_2 \\
\vdots \\
x_n
\end{array}
\right) =
\left(
\begin{array}{c}
b_1 \\
b_2 \\
\vdots \\
b_n
\end{array}
\right)
\]
\item {\bf Gleichungssystem} $~A x = b, ~A \in \{\Bbb R\}^{n,n}, ~x, b \in \{\Bbb R\}^n$ [0.4em]
Gestaffeltes System: $~B x = c$ mit oberer Dreiecksmatrix
\[\begin{matrix} B = \left( \begin{array}{cccc}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
0 & 0 & \cdots & b_{nn}
\end{array} \right) \end{matrix} \]
Grundidee: Darstellung von $~A$ als Produkt $~A = - C B$ mit unterer Dreiecksmatrix
\[\begin{matrix} C = \left( \begin{array}{cccc}
-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c_{21} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
c_{31} & c_{32} & -1 & \cdots & 0 \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & -1
\end{array} \right) \end{matrix} \]
Determinante: $~\det C = (-1)^n \neq 0$

\item {\bf Matrix-Vektor-Form eines Gleichungssystems} $~A \mathbf{u} = \mathbf{e}$
\[\begin{matrix} A = \left( \begin{array}{ccc}
1 & 1 & 1 \\
x & y & z \\
x^2 & y^2 & z^2
\end{array} \right), \quad \\
\mathbf{u} = \left( \begin{array}{c}
x \\
y \\
z
\end{array} \right), \quad \\
\mathbf{e} = [1, 1, 1]^T \end{matrix} \]
Determinante von $~A$
\[\det(A) = \left| \begin{array}{ccc}
1 & 1 & 1 \\
x & y & z \\
x^2 & y^2 & z^2
\end{array} \right| = (x-y)(y-z)(z-x) \]

```

```

\item {\bf Vollst"andige LU-Zerlegung} von  $A=(a_{ij})$  mit unterer bzw. oberer Dreiecksmatrix
\[ L = \left( \begin{array}{lllll} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{array} \right) \quad , \quad U = \left( \begin{array}{lllll} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{array} \right) \]
```

```

\item {\bf Cholesky}
\[ A = LL^T = \left( \begin{array}{rrr} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 3 & 8 & 3 \end{array} \right) \right) \quad \det A = \prod \lim_{i=1}^3 l_{ii}^2 = 36 \]
```

```

\item {\bf Permutationsmatrix} \[0.4em]
Bsp.:  $n=20$ ,  $p=(10,9,11,1,\dots)$ 
\[ P = \left( \begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \]
```

```

\item {\bf Boothroyd/Dekker-Matrix}
 $a_{ij} = \left( n+i-1 \atop n-i-1 \right) \left( n-1 \atop n-j \right)$ 
 $\frac{a_{i+j-1}}{a_{ij}} = \frac{a_{i+j-1}}{a_{ij}} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ 
 $n=6$ ,  $A = \left( \begin{array}{rrrrrr} 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ 21 & 70 & 105 & 84 & 35 & 6 \\ 56 & 210 & 336 & 280 & 120 & 21 \\ 126 & 504 & 840 & 720 & 315 & 56 \\ 252 & 1050 & 1800 & 1575 & 700 & 126 \\ 462 & 1980 & 3465 & 3080 & 1386 & 252 \end{array} \right)$ 
```

```

\item {\bf Wilkinsonmatrix}
 $A = \left( \begin{array}{l} 0.9143 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0.8762 & 0.7156 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0.7943 & 0.8143 & 0.9504 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0.8017 & 0.6123 & 0.7165 & 0.7123 \cdot 10^{-4} \end{array} \right)$ 
```



```

b_h = \left(
\begin{array}{l}
f_1 + \varphi_0 / h^2 \\
f_2 \\
f_3 \\
\vdots \\
f_{N-2} \\
f_{N-1} + \varphi_1 / h^2
\end{array} \right)

```

Eigenwerte von Tridiagonalmatrizen

```

\begin{eqnarray*}
A_1 = \left(
\begin{array}{rrrrrr}
a & b & & & 0 & 0 \\
c & a & b & & 0 & 0 \\
0 & c & a & & 0 & 0 \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
0 & 0 & 0 & & a & b \\
0 & 0 & 0 & & c & a
\end{array}
\right) = \text{tridiag}(c, a, b)
\lambda_i = \left\{
\begin{array}{l}
a, \\
a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}} \cos \frac{i\pi}{n+1}, \\
\end{array}
\right. \quad i = 1, 2, \dots, n

```

$N \times N$ Tridiagonalmatrix

```

\begin{eqnarray*}
A_2 = \left[
\begin{array}{cccc}
a & b & & 0 \\
c & a & b & \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & & c & a & b
\end{array}
\right]
\lambda_i = a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{i\pi}{N+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N

```

Koeffizientenmatrix mit Bandgestalt

```

A_h = \left(
\begin{array}{cccccc}
2 & -1 & & & & \\
1 & 1 & -1 & & & \\
-1 & 1 & 1 & -1 & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & -1 & 1 & 1 & -1 \\
\{\bf 0\} & & & -1 & 1 & 1
\end{array}
\right)_{(N-1) \times (N-1)}

```

Bandmatrizen

```

D = \left(
\begin{array}{cccc}
d_1 & & & \\
& d_2 & & \\
& & \ddots & \\
\{\bf 0\} & & & d_n
\end{array}
\right),
A = \left(
\begin{array}{cccc}
a_1 & b_1 & & \\
c_2 & a_2 & b_2 & \\
& \ddots & \ddots &
\end{array}
\right)

```

```

& & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\
{\bf 0} & & & c_n & a_n \\
\end{array} \right) = \text{tridiag}(c_i, a_i, b_i) \$\$

\item {\bf Blockstruktur}
\$\$ A = \left(
\begin{array}{cc}
A_{11} & A_{12} \\
A_{21} & A_{22}
\end{array} \right) =
\left(
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array} &
\begin{array}{cc}
b_{11} & b_{12} \\
b_{21} & b_{22}
\end{array} \\
\begin{array}{cc}
c_{11} & c_{12} \\
c_{21} & c_{22}
\end{array} &
\begin{array}{cc}
d_{11} & d_{12} \\
d_{21} & d_{22}
\end{array}
\end{array} \right) \$\$

\item {\bf Charakteristisches Polynom der Tridiagonalmatrix}
\left[ \begin{array}{l}
p_n(\lambda) = \det \\
\left( \begin{array}{cccccc}
a_1 - \lambda & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
c_1 & a_2 - \lambda & b_2 & 0 & \dots & 0 \\
0 & c_2 & a_3 - \lambda & b_3 & 0 & \dots \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} & 0 & c_{n-2} a_{n-1} - \lambda b_{n-1} \\
0 & \dots & 0 & c_{n-1} a_n - \lambda b_n
\end{array} \right) \\
\text{Notation des Polynoms in der Normalform} \\
F_n = p_n(\lambda) = (-1)^n (q_n \lambda^n + q_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + q_1 \lambda + q_0), \sim q_n = 1 \\
\\
\text{Berechnung des Funktionswertes} \\
\text{Die Entwicklung der Determinante nach der letzten Spalte und dann nach} \\
\text{der letzten Zeile f\"uhrt auf die rekursive Formel (3-Term-Rekursion)} \\
F_n = (a_n - \lambda) F_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} F_{n-2}, \sim n=2,3,\dots, \sim F_0=1, \sim F_1=a_1 - \lambda
\end{array} \right]

\item {\bf Newtonverfahren} \left[ 0.4em \right]
\text{NV f\"ur Systeme von } n \text{ nichtlinearen Gleichungen}
\begin{eqnarray*}
f(x) &= & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T = 0, \sim x \in \mathbb{R}^n \left[ 0.4em \right] \\
\text{\textbf{J}}(x^{(i)}) &\Delta x^{(i)} \\
&= & - f(x^{(i)}) \left[ 0.4em \right] \\
x^{(i+1)} &= & x^{(i)} + \Delta x^{(i)}, \sim i=0,1,\dots \leq i_{\max}, \sim x^{(0)} \text{ gegeben}
\end{eqnarray*}
\text{\textbf{J}} = \text{Jacobimatrix der partiellen Ableitungen von } f(x)
\left[ \begin{array}{c}
\left( \begin{array}{cccc}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}
\end{array} \right)
\end{array} \right]

```

```

\end{array} \right) \]
\[\begin{array}{cl}
x^{\{(0)\}} & \& \mbox{- Startvektor}\\
i>i_{\max} \& \mbox{ oder } \& |f(x^{\{(i)\}})| < \varepsilon \\
& \& \mbox{- Abbruchbedingung}\\
i_{\max} & \& \mbox{- maximale Iterationszahl}\\
\varepsilon & \& \mbox{- Toleranz}
\end{array}\]

\item {\bf Differenzenverfahren f"ur Anfangsrandwertaufgabe}\\[0.4em]
\[\left. \begin{array}{rcl}
& A{\bf D}^{n+1} & = & {\bf U}^n \\
& {\bf U}^{n+1} & = & 2{\bf D}^{n+1} - {\bf U}^n
\end{array} \right) \]
mit  $(M-1) \times (M-1)$  Matrix
\[\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccccc}
1+r & -\frac{1}{2}r & 0 & \cdots & 0 \\
-\frac{1}{2}r & 1+r & -\frac{1}{2}r & & \\
0 & -\frac{1}{2}r & \ddots & \ddots & \\
0 & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2}r \\
0 & & & -\frac{1}{2}r & 1+r
\end{array} \right]
\]
```

3 Tabellen, Tableaus

- **Resultatstableau**

Resultat der Ausscheidungen am 01.01.1999 in Ilmenau		
Name	Mark	Grad
Winner	90	A
Paul	51	C
Emma	5	F
Werner	1	H
Zusammenstellung durch XXX		

- **Rechnungen mit den VGA für $Ax = b$**
GKF = *double* (48 Binärstellen, 13-14 Dezimalst.)

n	7	10	13
$\det A$	$4.835801 \cdot 10^{-25}$	$2.16 \cdot 10^{-53}$	0
Anzahl der sign. Stellen	7	3	0
$\ A\ _{\infty}$		2.93	
$\ A^{-1}\ _{\infty}$		$1.21 \cdot 10^{13}$	

- **VGA ohne Pivotisierung**

$A^{(0)}$	0.21000E+1	0.25120E+4	-0.25160E+4	0.65000E+1
	-0.13000E+1	0.88000E+1	-0.76000E+1	-0.53000E+1
	0.90000E+0	-0.62000E+1	0.46000E+1	0.29000E+1

$A^{(1)}$	0.21000E+1	0.25120E+4	-0.25160E+4	0.65000E+1
	-0.61905E+0	0.15639E+4	-0.15651E+4	-0.12762E+1
	0.42857E+0	-0.10828E+4	0.10829E+4	0.11430E+0

$A^{(2)}$	0.21000E+1	0.25120E+4	-0.25160E+4	0.65000E+1
	-0.61905E+0	0.15639E+4	-0.15651E+4	-0.12762E+1
	0.42857E+0	-0.69237E+0	0.70000E+0	0.76930E+0

• **VGA mit impliziter Skalierung = relative Pivotwahl**

x_1	x_2	x_3		s_i	q_i
2.1	2512	-2516	6.5	5030.1	0.41749E-3
-1.3	8.8	-7.6	-5.3	17.7	0.73446E-1
0.9	-6.2	4.6	2.9	11.7	0.76923E-1

0.9	-6.2	4.6	2.9	-	-
-1.4444	-0.15530	-0.95580	1.1112	1.1111	0.13977
2.3333	2526.5	-2526.7	0.26660	5053.2	0.49998

0.9	-6.2	4.6	2.9
2.3333	2526.5	-2526.7	-0.26660
-1.4444	-0.61468E-4	-1.1111	-1.1112

• **VGA**

Beispiel: $n = 3$, mit Spaltenpivotsuche

Permutationsvektor für Zeilenvertauschungen $p = (p_1, p_2, p_3)$

Initialisierung $p = (1, 2, 3)$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 \rightarrow x_1 = y_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= y_2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

$p = (1, 2, 3)$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & \boxed{2} & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} y_1 - x_2 - x_3 &= x_1 \\ y_1 + x_2 + 2x_3 &= y_2 \\ y_1 + 2x_2 + 5x_3 &= y_3 \rightarrow \text{Zeilenvertauschung } 2 \leftrightarrow 3 \end{aligned}$$

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \boxed{2} & 5 \\ 1 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} y_1 - x_2 - x_3 &= x_1 \\ y_1 + 2x_2 + 5x_3 &= \tilde{y}_2 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(-5x_3 - y_1 + \tilde{y}_2) \\ y_1 + x_2 + 2x_3 &= \tilde{y}_3 \end{aligned}$$

$p = (1, 3, 2), \quad \tilde{y}_2 = y_3, \quad \tilde{y}_3 = y_2$

- **Rechenzeiten**

n	Rechenzeit größer als
10	0.0036 Sekunden
15	23.4 Minuten
20	77.2 Jahre
30	8.41 Billionen = $8.41 \cdot 10^{15}$ Jahre

- **Rechenzeiten mit GKF *extended***

Matrixgröße $n \times n$	Zeit $t_n(\text{sec})$	aufeinanderfolgende Quotienten ($n_1 > n_2$)	
		$q_1 = \frac{t_{n_1}}{t_{n_2}}$	$q_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^3$
50×50	0.3		
100×100	2.5	8.3	8.0
150×150	9	3.6	3.4
200×200	25	2.8	2.4
250×250	50	2.0	2.0
300×300	90	1.8	1.7
400×400	220	2.4	2.4
720×720	$\approx 21\text{min}$	5.7	5.8
1700×1700	$\approx 4.5\text{h}$	12.9	13.2

- **Vergleich von Rechenzeiten mit verschiedenen GKF**






Matrixgröße $n \times n$	Rechenzeiten $t_n(\text{sec})$		
	<i>real</i> ohne $\{N+\}$	<i>real</i> mit $\{N+\}$	<i>extended</i>
50×50	0.6	0.4	0.3
100×100	4.8	3.8	2.5
150×150	17	13	9
200×200	42	32	25
250×250	82	64	50
300×300	142	111	90

- Rechenzeiten

Verfahren	TC 1.0	BC 3.1	BC 4.5	TP 6.0	TP 7.0	BP 7.0
STD	26.852	25.211	26.750	29.00	27.57	30.37
M=2	23.680	21.309	22.520	25.42	26.64	26.86
M=4	23.008	20.492	21.469	24.06	25.01	25.37
M=8	22.680	19.609	20.441	24.03	25.00	25.35
ADR	14.609	21.199	20.160	22.80	26.68	24.55
ADR M=2	15.987	19.109	21.031	22.34	25.60	23.89
ADR M=4	15.875	18.781	21.198	21.89	24.98	23.51
ADR M=8	15.883	18.570	21.091	21.48	24.83	23.23
% von ASM	162	206	224	238	276	258

Tab.3. Rechenzeit für Compiler (in *sec*) auf PC AMD 486DX4-100
bei 200 Matrixmultiplikationen $C = A * B$ mit $n = 48$.

- Boxbefehle

Boxbefehle	Verzerrung des Bildes	Bemerkung
$\backslash\text{epsfbox}[0\ 0\ w\ h]\{*.eps\}$ $\backslash\text{epsfbox}\{*.eps\}$ $\backslash\text{epsfxsize}\ w\ \text{mm}$ $\backslash\text{epsfysize}\ h\ \text{mm}$ $\backslash\text{epsfbox}[0\ 0\ w\ h]\{*.eps\}$		Original, $w \geq h$
$\backslash\text{epsfysize}\ h'\ \text{mm}$ $\backslash\text{epsfbox}\{*.eps\}$		Bildhöhe = h' mm
$\backslash\text{epsfxsize}\ w'\ \text{mm}$ $\backslash\text{epsfbox}\{*.eps\}$		Bildweite = w' mm Situation bei $w' = h'$
$\backslash\text{epsfysize}\ h'\ \text{mm}$ $\backslash\text{epsfbox}\{*.eps\}$		Bild auf Seitenbreite $h'=120\text{mm}$ ($w' \approx 150\text{mm}$)
$\backslash\text{epsfxsize}\ w'\ \text{mm}$ $\backslash\text{epsfysize}\ h'\ \text{mm}$ $\backslash\text{epsfbox}\{*.eps\}$		Bild in x, y verzerrt $w'=50\text{mm}$, $h'=90\text{mm}$

Tab.7. Auswahl von Bildverzerrungen

• **Tabellarischer Vergleich der Eigenschaften der Iterationsverfahren**

EW $\lambda = \lambda(A) \in (0, 4)$

$$\lambda_1 = \lambda_{min} = 4 \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \lambda_n = \lambda_{max} = 4 - \lambda_{min} = 4 \cos^2 \frac{\pi h}{2}$$

Verf.	Iterationsmatrix H	EW $\mu = \mu(H)$	$\varrho(H)$	
			$\max \mu(H) $	\approx
JA, GSV	$J = I - D^{-1}A$ $= I - \frac{1}{2}A$	$\mu_i = 1 - \frac{1}{2}\lambda_i$ $\mu_i \in (-1, 1)$ $\mu_{n-i} = -\mu_i$	$\mu_1 = 1 - \frac{1}{2}\lambda_{min}$ $= 1 - \frac{1}{2}\lambda_{max} $ $= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2}$ $= \cos(\pi h)$	$1 - \frac{\pi^2 h^2}{2}$
JOR, JA(ω)	$J_\omega = I - \omega D^{-1}A$ $= I - \frac{\omega}{2}A$ $\omega \in (0, 1]$	$1 - \frac{\omega}{2}\lambda_i$	$1 - \frac{\omega}{2}\lambda_{min}$ $= 1 - 2\omega \sin^2 \frac{\pi h}{2}$	$1 - \frac{\omega \pi^2 h^2}{2}$
GS, ESV	$H_1 = I - (D - E)^{-1}A$	0 sowie $\mu_i^2(J) \in [0, 1)$ $0, \dots, \mu_2^2, \mu_1^2$	$\mu_1^2 = \cos^2(\pi h)$ $< \mu_1$	$1 - \pi^2 h^2$
SOR	$H_\omega = I - \omega(D - \omega E)^{-1}A$ $\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{\gamma \Gamma}}$ $\gamma = \mathcal{O}(h^2), \Gamma = \mathcal{O}(1)$		$\ H_\omega\ _A =$ $\sqrt{\frac{\sqrt{\Gamma} - \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\Gamma} + \sqrt{\gamma}}}$	$1 - \mathcal{O}(h) $
	$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu_1^2}}$ $= \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - \mu_1)(1 + \mu_1)}}$ $\approx \frac{2}{1 + \pi h} \in [1, 2)$		$\varrho(H_{\omega_{opt}}) = \omega_{opt} - 1$	$\frac{1 - \pi h}{1 + \pi h} \approx$ $1 - 2\pi h$
		μ EW von J , dann ζ EW von H_ω mit $(\zeta + \omega - 1)^2 = \zeta \omega^2 \mu^2$ $\zeta_{1,2} = 1 - \omega + \frac{1}{2}\omega^2 \mu^2 \pm \omega \mu \sqrt{1 - \omega + \frac{1}{4}\omega^2 \mu^2}$ $\varrho(H_\omega) =$ $\begin{cases} 1 - \omega + d_1 + \omega \mu_1 \sqrt{1 - \omega + \frac{1}{2}d_1}, & \omega \in (0, \omega_{opt}) \\ \omega - 1, & \omega \in [\omega_{opt}, 2) \end{cases}$ wobei $d_1 = \frac{1}{2}\omega^2 \mu_1^2$		

Verf.	Iterationsmatrix H	EW $\mu = \mu(H)$	$\varrho(H)$	
			$\max \mu(H) $	\approx
RF	$R = I - \omega A$ $\omega_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} \approx \frac{1}{2}$	$1 - \omega \lambda_i$	$\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$ $= \cos(\pi h)$	$1 - \frac{\pi^2 h^2}{2}$
GV	$x^{(m+1)} = x^{(m)} + \alpha_{m+1} r^{(m)}$ $r^{(m)} = b - Ax^{(m)}$ $G = I - \alpha_{m+1} A$	$1 - \alpha_{m+1} \lambda_i$ $\eta_G = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^m$ $\kappa = \text{cond}(A)$ $= \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$	$\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$ $= \cos(\pi h)$ $= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2}$	$1 - \frac{\pi^2 h^2}{2}$
CGV	$x^{(m+1)} = x^{(m)} + \alpha_{m+1} p^{(m+1)}$ $p^{(m+1)} = r^{(m)} + \beta_m p^{(m)}$ $CG = I - \alpha_{m+1} W^{-1} A$	$c = \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}$ $\eta_{CG} = \frac{2c^m}{1 + c^{2m}}$	$c = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1 + 2\sqrt{\kappa}}$ $= \frac{1 - \lambda_{min}/2}{1 + \sqrt{\lambda_{min} - \lambda_{min}^2/4}}$ $\approx \frac{1 - \lambda_{min}/2}{1 + \sqrt{\lambda_{min}}}$ $= \frac{1 - 2 \sin^2(\pi h/2)}{1 + 2 \sin(\pi h/2)}$ $\approx \frac{1 - \pi^2 h^2/2}{1 + \pi h}$	$1 - \pi h$

• **Konditionszahlen**

A	Konditionszahlen					
	$\text{cond}_{\infty}(A)$	$\text{skal}_{\infty}(A)$	$\text{cond}_2(A)$	$h\text{cond}(A)$	$f\text{cond}(A)$	$c\text{cond}(A)$
A_1	21	11	14.8	0.25	1.6	13.3
A_2	22	10.6	15.4	0.26	0.44	18.1
A'_2	8.4	6.7	6.2	0.34	0.37	9.4
A_3	11.4	5	7.5	0.53	0.80	9.4
A'_3	8.6	4.5	5.0	0.54	0.60	9.7
A_4	91	44	60.8	0.067	0.39	97.5
A'_4	68.6	37	49.3	0.069	2.89	64.1
A_5	20.8	9	12.1	0.25	0.67	17.6
A'_5	5.4	2.6	3.9	0.66	0.19	6.3

• **3 Mathematica-Varianten mit Speicherbedarf der PS-Dateien**

Graphik n=1,...,6	Windows		Unix	
	V 2.2.3	V 2.2.1	V 2.2.1	
	sk02_n.eps	zi02_n.ps	ws02_n.ps	wg02_n.ps
p1	35137	21416	33171	31712
p2	31693	19870	31625	30166
p3	35372	26352	38110	36651
p4	260114	87228	98986	97527
p5	115107	36147	47905	46446
p6	70209	39152	50898	49439
p	sk02_a64.eps 396403	zi02_a64.ps 130642	ws02_a64.ps 141800	wg02_a64.ps 140340

Tab.4. Speicherbedarf in Byte der PS-Files von $p1, \dots, p6, p$

Als nächstes fassen wir die in den PS-File und ihren Eigenschaften angegebenen Bereichsgrößen für die Graphiken (BoundingBox) und die Bildgrößen zusammen.

Der Umrechnung zwischen den Maßstäben ist $1'' = 1\text{ in} = 25.4\text{ mm} = 72.27\text{ pt}$.

Graphik n=1,...,6	Windows		Unix
	V 2.2.3 sk02_n.eps	V 2.2.1 zi02_n.ps	V 2.2.1 ws02_n.ps
	pt	eingebettet in Bereich $612 * 792\text{ pt}$ $\approx 8.5 * 11.0\text{ in} \approx 215 * 279\text{ mm}$	
		pt	$Pixel$
p1, p2	$276.25 * 170.25$ $\approx 97 * 86\text{ mm}$	$612 * 377$	$300 * 185$
p3, p4	$276.25 * 274.25$ $\approx 97 * 96\text{ mm}$	$612 * 607$	$300 * 298$
p5	$276.25 * 226.25$ $\approx 97 * 80\text{ mm}$	$612 * 501$	$300 * 246$
p6	$276.25 * 226.25$ $\approx 97 * 97\text{ mm}$	$612 * 612$	$300 * 300$
p	sk02_a64.eps $232.25 * 219.00$ $\approx 82 * 77\text{ mm}$	zi02_a64.ps $612 * 572$	ws02_a64.ps $252 * 238$

Tab.5. Bildgrößen Breite*Höhe von Graphiken $p1, \dots, p6, p$

- **Pixeleinstellung**

Die Pixeleinstellung für die Graphikgröße (siehe Kap. 3.1) wirkt sich aus auf die Bereichsgrenzen der Box im PS-File (Kasten, BoundingBox).

<i>Mathematica</i> Graphics Settings	PS-File BoundingBox
Width*Heigth	
<i>Pixel</i>	<i>pt</i>
300 * 300	232.25 * 143.00
400 * 400	309.75 * 191.25
500 * 500	387.25 * 239.00
600 * 600	464.75 * 287.25
Differenz \approx	77.5 48.0

Tab.6. Pixelkoordinaten und BoundingBox
für ausgewählte Graphik
in *Mathematica* V2.2.3 Windows

- **Nutzung der Skalierung**

Graphik	h <i>pt</i>	r <i>pt</i>	Bild mit Rand	Skalierung der Höhe
			$h + 2r'$	$y = 438 \frac{h+2r'}{w}$
			<i>pt</i>	<i>pt</i>
p1, p2	377	207.5	417	298
p3, p4	607	92.5	647	463
p5	501	145.5	541	387
p6	612	90.0	652	467
zi02_a6*.ps p	572	110.0	612	438

Tab.10. Bildhöhen h und Leerräume r vor und nach der Graphik,
 $w = 612$, $h + 2r = 792$, $r' = 20$,
Skalierungsmaßstab in `\epsfysize y pt`

- **Rekursion**

In der GK-Arithmetik in Turbo Pascal mit den Zahlenformaten *double* (15-16 dezimale Mantissenstellen) und *extended* (19-20 Mantissenstellen, 18 Stellen werden angezeigt) sowie mit einem bestmöglichen Startwert I_0 , wandert pro Rekursionsschritt die erste ungültige Mantissenstelle um durchschnittlich eine Position nach links.

n	I_n auf 20 Dezimalstellen genau	I_n mit Rekursion und GK-Format	
		<i>double</i> 16 Nachkommastellen	<i>extended</i> 18 Nachkommastellen
0	0.63212055882855767840	0.6321205588285577	0.632120558828557678
1	0.36787944117144232160	0.3678794411714423	0.367879441171442322
2	0.26424111765711535681	0.2642411176571153	0.264241117657115357
3	0.20727664702865392957	0.207276647028654 0	0.207276647028653930
4	0.17089341188538428171	0.170893411885384 0	0.17089341188538428 1
5	0.14553294057307859146	0.14553294057308 01	0.14553294057307859 3
6	0.12680235656152845122	0.1268023565615 195	0.1268023565615284 41
7	0.11238350406930084144	0.1123835040693 635	0.112383504069300 915
8	0.10093196744559326848	0.100931967445 0921	0.10093196744559 2678
9	0.09161229298966058367	0.09161229299 41707	0.09161229298966 5896
10	0.08387707010339416334	0.0838770700 582927	0.0838770701033 41042
11	0.07735222886266420323	0.077352229 3587803	0.077352228863 248537
12	0.07177325364802956125	0.07177324 76946367	0.07177325364 1017554
13	0.06694770257561570369	0.0669477 799697233	0.066947702 666771802
14	0.06273216394138014834	0.06273 10804238732	0.06273216 2665194768
15	0.05901754087929777487	0.0590 337936419019	0.0590175 60022078475
16	0.05571934593123560215	0.055 4593017295701	0.055719 039646744406
17	0.05277111916899476344	0.05 71918705973076	0.05277 6326005345098
18	0.05011985495809425803	-0.0 294536707515363	0.050 026131903788240
19	0.04772275579620909737	1.5596197442791890	0.04 9503493828023437
20	0.04554488407581805262	-30.1923948855837807	0.0 09930123439531258

Tab.1. Rekursion $I_n = 1 - nI_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, 20$, I_0 maximal genau.

Startintervall $I_0 : [0.632120 , 0.632121]$		
n	[inf (I_n) , sup (I_n)]	
0	[6.32119E-001, 6.32122E-001]
1	[3.67878E-001, 3.67881E-001]
2	[2.64239E-001, 2.64243E-001]
3	[2.0727E-001, 2.0729E-001]
4	[1.708E-001, 1.710E-001]
5	[1.454E-001, 1.457E-001]
6	[1.26E-001, 1.28E-001]
7	[1.1E-001, 1.2E-001]
8	[7.8E-002, 1.2E-001]
9	[-6.9E-002, 3.0E-001]
10	[-2.0E+000, 1.7E+000]
11	[-1.8E+001, 2.3E+001]
12	[-2.7E+002, 2.2E+002]
13	[-2.8E+003, 3.5E+003]
14	[-4.9E+004, 3.9E+004]
15	[-5.8E+005, 7.4E+005]

Startintervall $I_0 : [0.63212 , 0.63212]$		
n	[inf (I_n) , sup (I_n)]	
0	[6.321199999999999E-001, 6.321200000000001E-001]
1	[3.678799999999999E-001, 3.678800000000001E-001]
2	[2.642399999999998E-001, 2.642400000000001E-001]
3	[2.072799999999999E-001, 2.072800000000001E-001]
4	[1.708799999999999E-001, 1.708800000000001E-001]
5	[1.455999999999999E-001, 1.456000000000002E-001]
6	[1.263999999999999E-001, 1.264000000000001E-001]
7	[1.151999999999999E-001, 1.152000000000001E-001]
8	[7.8399999996E-002, 7.8400000001E-002]
9	[2.943999999E-001, 2.944000001E-001]
10	[-1.944000001E+000, -1.943999999E+000]
11	[2.238399999E+001, 2.238400001E+001]
12	[-2.676080001E+002, -2.676007999E+002]
13	[3.479903999E+003, 3.479904001E+003]
14	[-4.871765601E+004, -4.871765599E+004]
15	[7.307658399E+005, 7.307658402E+005]

Tab.2. Rekursion $I_n = 1 - nI_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, 15$, I_0 gegeben, mit Pascal-XSC und Intervallarithmetik.

• Rückwärtsrekursion

n	\tilde{I}_n mit Rückwärtsrekursion	
	$\tilde{I}_{10} = 1/12$	$\tilde{I}_{10} = 1/11$
10	0.083 333333333333	0.0 909090909090909
9	0.0916 666666666667	0.09 09090909090909
8	0.1009 259259259259	0.101 0101010101010
7	0.11238 42592592593	0.1123 737373737374
6	0.126802 2486772487	0.12680 37518037518
5	0.1455329 585537919	0.145532 7080327080
4	0.17089340 82892416	0.1708934 583934584
3	0.207276647 9276896	0.2072766 354016354
2	0.264241117 3574368	0.26424112 15327882
1	0.367879441 3212816	0.36787943 92336059
0	0.632120558 6787184	0.63212056 07663941

Tab.3.
Rückwärtsrekursion
 $\tilde{I}_{n-1} = (1 - \tilde{I}_n)/n$,
 $n = 10, 9, \dots, 1$,
 \tilde{I}_{10} gegeben,
Turbo Pascal mit
GK-Format *double*.

• Varianten für π

j	Variante 1		Variante 2	
	$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ $n = 6 * 2^j$	$\pi^{(1)}$	$s_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}$	$\pi^{(2)}$
0	1.0000000000E-00	3.0000000000	1.0000000000E-00	3.0000000000
1	5.1763809020E-01	3.1058285412	5.1763809020E-01	3.1058285412
2	2.6105238444E-01	3.1326286132	2.6105238444E-01	3.1326286133
3	1.3080625846E-01	3.1393502029	1.3080625846E-01	3.1393502030
4	6.5438165642E-02	3.1410319508	6.5438165643E-02	3.1410319509
5	3.2723463242E-02	3.1414524712	3.2723463253E-02	3.1414524723
..
17	7.9790117887E-06	3.1374750995	7.9894832701E-06	3.1415926535
18	3.8146972656E-06	3.0000000000	3.9947416351E-06	3.1415926536
19	1.9073486328E-06	3.0000000000	1.9973708175E-06	3.1415926536
20	0.0000000000E-00	0.0000000000	9.9868540877E-07	3.1415926536
21	0.0000000000E-00	0.0000000000	4.9934270438E-07	3.1415926536

Tab.8. π nach Archimedes mit einbeschriebenen Vielecken,
Turbo Pascal mit GK-Format *real*

- Quadratur von Newton-Cotes, Tschebyscheff und Gauß-Legendre sowie Gauß-Tschebyscheff

$$I = \int_{-1}^1 x^8 dx = \frac{2}{9} = 0.222\,222$$

n	Newton-Cotes N_{n+1}	Tschebyscheff T_{n+1}	Gauß-Legendre G_{n+1}
0		0	T_1
1	2	0.024 691 4	T_2
2	0.666 667	0.083 333	0.144 000
3	0.500 229	0.159 012	0.159 012
4	0.316 667	0.184 876	0.222 222
5	0.281 387	0.212 063	0.222 222

- Quadratur von Gauß-Tschebyscheff und Gauß-Legendre

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2.403\,939\,430\,634\,41$$

n	0	1	2	3	4
GT_{n+1}	$\pi=3.141\,593$	2.388 379	2.404 071	2.403 938 839	2.403 939 432
G_{n+1}	2	2.052 456	2.144 494	2.199 201 227	2.235 232 015

- Quadratur von Gauß-Tschebyscheff und Gauß-Legendre

$$I = \int_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\pi}{2} = 1.570\,796$$

n	0	1	2	3	4	18	19	28	29
GT_{n+1}	0	1.8138	1.3711	1.6274	1.5028	1.5733	1.5662	1.5718	1.5688
G_{n+1}	0	1.2247	1.0758	1.3384	1.2910				

- **Schachbrett mit Dame**

	x	x	x				
x	x	D	x	x	x	x	x
	x	x	x				
x		x		x			
		x			x		
		x				x	
		x					x
		x					

- **Ökologisches Modell**

Beispiel: $N = 6$

		$j \rightarrow$					
		1	2	3	4	5	$N = 6$
i ↓	1						
	2			<i>Leer</i>			
	3		<i>Gras</i>	$A[i,j]$ <i>Hase</i>	<i>Gras</i>		
	4			<i>Leer</i>			
	5						
	$N = 6$						

In jedem Spielzug wird eines der Felder zufällig bestimmt. In Abhängigkeit vom bisherigen Zustand des Feldes und den 4 Feldnachbarn (nur horizontal und vertikal gesehen) werden das Feld und/oder Feldnachbarn verändert.

Dies kann man durch eine *Umwandlungstabelle* beschreiben. Wir benutzen hier folgende Strategie.

Nachbarfeld	Erwürfeltes Feld $A[i, j]$ ist			
	Leer	Gras=Grün	Hase=Gelb	Fuchs=Rot
alle Leer Gras	→Gras →Gras		Nachbarfeld Gras→Hase	jeweils mit der Treffer- wahrscheinlichkeit →Leer →Leer
Hase Fuchs	→Gras →Gras	→Hase	→Fuchs	→Leer →Leer

• Chiffrieren und Kodes

B1

Text	S	A	S	A	S	A	19	1	19	1	19	1
Kennwort	1	3	5	6	1	3	29	31	33	34	29	31
-39							48	32	52	35	48	32
Chiffrierung	I	4	M	7	I	4	9	32	13	35	9	32

B2

Text	L	I	S	T	E		12	9	19	20	5
Kennwort	W	E	T	T	E	R	23	5	20	20	5 18
-39							35	14	39	40	10
Chiffrierung	7	N	.	A	J		35	14	39	1	10

• Vigenère-Tableau

	Spalten												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	...
Z e i l e n	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	...	y
	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	...




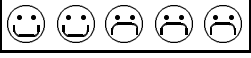

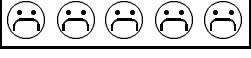
	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	...

	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	...

	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	...

	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	...

- **Symbolische Wertung von Software**

Wertung	Ikone
sehr gut	
gut	
zufriedenstellend	
mäßig	
mangelhaft	
konfus, nie wieder	

- **Zu Symbolen der Zeichensprache im Rechnernetz**

Smiley	Bedeutung
MfG	Mit freundlichen Grüßen
< g >	Grinsen
< bg >	Breites Grinsen
bbl	be back later (bin bald zurück)
CU	see you (auf Wiedersehen)
fyi	for your information (zu deiner Info)
rofl	rolling on the floor and laughing (auf dem Boden wälzen und lachen)
gd&r	grinning, ducking and running (grinsen, ducken und weg)
PMFJI	pardon me for jumping in (entschuldige, daß ich mich einmische)

Smiley	Bedeutung	Smiley	Bedeutung
:~i	weder glücklich, noch traurig, eben so lala	[:~)	man hat gerade die Kopfhörer übergestülpt
:-(traurig	:~<	sehr traurig, Anbaggern zwecklos
:~)	lustig, Lachen, happy	:~	verärgert
;~)	Zwinkern	(~:	Linkshänder
:~D	Hahaha!	8~)	Brillenträger
:~o	überrascht, geschockt	:~Q	Raucher
O:~)	Beule	=:~)	Irokese
:~)=	Szenebärtchen	:*)	angetrunken
:~O	Quatschkopf	*<:~)	Weihnachtsmann
(:~<)	Schwätzer, Labersack		

• **Praktikumsliste**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMEMAU
Institut für Mathematik

Einschreibeliste für das Praktikum

Nutzererklärung für Praktikumsteilnehmer

Der/Die Praktikumsteilnehmer/in erklärt, daß er/sie

1. die Nutzerordnung¹⁾ für den Pool
zur Kenntnis genommen hat und diese einhalten wird.
2. sein/ihr LOGIN nicht an Dritte weitergeben wird.
3. die Bestimmungen der §§ 69 a bis g²⁾ des UrhG einhalten wird.
4. keine Software unberechtigterweise kopieren bzw. in das Netz einbringen wird.

Der/Die Praktikumsteilnehmer/in unterschreibt diese Bedingungen auf der nachfolgenden Einschreibeliste für das Praktikum in dem Bewußtsein, daß er/sie bei einem Verstoß gegen diese Bedingungen mit strafrechtlichen sowie disziplinarischen Konsequenzen und Schadensersatzansprüchen der Technischen Universität Ilmenau zu rechnen hat.

¹⁾ Die Nutzerordnung liegt bzw. hängt aus.

²⁾ Der Text der §§ 69 a bis g UrhG kann eingesehen werden.

Einschreibeliste für das Praktikum

lfd. Nr.	Name, Vorname	Fakultät	Datum	Unterschrift
1				
2				
3				
4				

- **Teilnehmerliste**

TU Ilmenau
 Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
 FG Numerische Mathematik und Informationsverarbeitung
PD Dr. W.Neundorf Curiebau Weimarer Str.25, Zi.366, Tel. 693267

e-mail: w.neundorf@mathematik.tu-ilmenau.de

Homepage: http://imath.mathematik.tu-ilmenau.de/~neundorf/index_de.html

Teilnehmerliste

Lehrveranstaltung : Grundkurs Informatik und Programmierung

WS98 : 3 SWS, 2V/1Ü

SS99 : 5 SWS, 2V/1Ü/2P

Studiengang : Technische Physik

Matrikel : M98

Studienjahr : 1998/99

Zeit, Ort : WS98 V Mittwoch 7.00-8.30Uhr C108

Ü Freitag G 7.00-8.30Uhr C108

bzw. Rechnerkabinett C115 IfMath

Nr.	Name, Vorname	Matrikelnr.	Kenntnisse I&P	Unterschrift
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

- Semesterliste

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMEMAU
Institut für Mathematik

Lehrveranstaltung:

Studienjahr, Semester:

Studiengang, Matrikel:

Semesterliste

[illegible]

Durchführender:

Bemerkungen:

3.1 Quelltexte

```

\begin{itemize}
\item {\bf Resultatstableau}\\[0.4em]
\framebox{\parbox[t]{8cm}{
  Resultat der Ausscheidungen am 01.01.1999\\[0.2em]
  in Ilmenau\\[0.2em]
\centerline{
\begin{tabular}{|l|l|c|}\hline
  Name & Mark & Grad \\\hline\hline
  Winner & 90 & A \\\
  Paul & 51 & C \\\
  Emma & 5 & F \\\
  Werner & 1 & H \\\hline
\end{tabular}
}\[0.4em]
Zusammenstellung durch XXX}}

\item {\bf Rechnungen mit den VGA f"ur  $Ax=b$ }\[1em]
  GKF =  $\$double\$ (48 \text{ Bin"arstellen, } 13\text{-}14 \text{ Dezimalst.})$  \[1em]
\hspace*{1cm}
\begin{tabular}{c|c|c|c}
  $n$ & & & \\
  & 7 & 10 & \quad 13 \quad \backslash \quad \backslash \\
  & & & \\
  $\det A$ &  $\$4.835801\cdot 10^{-25}$  &  $\$2.16\cdot 10^{-53}$  & 0 \\
  Anzahl der & & & \\
  sign. Stellen & 7 & 3 & 0 \\
  $\backslash A\backslash_{\infty}$ & & 2.93 & \\
  $\backslash A^{-1}\backslash_{\infty}$ & &  $\$1.21\cdot 10^{13}$  & 
\end{tabular}\[1em]

\item {\bf VGA ohne Pivotisierung}\[1em]
\hspace*{1cm}  $A^{(0)}$ 
\begin{tabular}{c|c|c|c|c}
  & & & & \[ -1.7ex \\
  \fbox{\bf 0.21000E+1} & 0.25120E+4 & -0.25160E+4 & 0.65000E+1 & \\
  -0.13000E+1 & 0.88000E+1 & -0.76000E+1 & -0.53000E+1 & \\
  0.90000E+0 & -0.62000E+1 & 0.46000E+1 & 0.29000E+1 & \[ 0.2em]
\end{tabular}\[1em]
\hspace*{1cm}  $A^{(1)}$ 
\begin{tabular}{c|c|c|c|c}
  & & & & \[ -1.7ex \\
  0.21000E+1 & 0.25120E+4 & -0.25160E+4 & 0.65000E+1 & \[ 0.2em]
  -0.61905E+0 & \fbox{\bf 0.15639E+4} & & & \\
  & & -0.15651E+4 & -0.12762E+1 & \\
  & & & & \[ -1.9ex]
  0.42857E+0 & -0.10828E+4 & 0.10829E+4 & 0.11430E+0 & \[ 0.2em]
\end{tabular}\[1em]
\hspace*{1cm}  $A^{(2)}$ 
\begin{tabular}{c|c|c|c|c|c}
  & & & & & \[ -1.7ex \\
  0.21000E+1 & 0.25120E+4 & -0.25160E+4 & 0.65000E+1 & & \\
  & & & & & \[ -2.4ex] \cline{1-1}
  -0.61905E+0 & 0.15639E+4 & -0.15651E+4 & -0.12762E+1 & & \[ -1.7ex]
  & & & & & \[ -1.9ex]
  0.42857E+0 & -0.69237E+0 & & 0.70000E+0 & 0.76930E+0 & \[ 0.2em]
\end{tabular}\[1em]

```

```

\item {\bf VGA mit impliziter Skalierung = relative Pivotwahl}\[0.4em]
\hspace*{0.5cm}
\begin{tabular}{|rrr@{\quad}|@{\quad}r|@{\quad}r|@{\quad}r|}\hline
& & & & & & \\
\$~~~~~x_1\$& \$~~~~~x_2\$& \$~~~~~x_3\$& \$~~~~~s_i\$& \$~~~~~q_i\$& \$~~~~~& \\
& & & & & & \\
2.1 \ & 2512 \ & -2516 \ & 6.5 \ & 5030.1 \ & 0.41749E-3 \ & \\
-1.3 \ & 8.8 \ & -7.6 \ & -5.3 \ & 17.7 \ & 0.73446E-1 \ & \\
\fbbox{\bf 0.9}& -6.2 \ & 4.6 \ & 2.9 \ & 11.7 \ & \fbbox{\bf 0.76923E-1} \ & \\
\end{tabular}\[1.0em]
\hspace*{0.5cm}
\begin{tabular}{|r|rr@{\quad}|@{\quad}r|@{\quad}r|@{\quad}r|}\hline
\multicolumn{1}{|r|}{\{}} & \$~~~~~& \$~~~~~& \$~~~~~& \$~~~~~& \$~~~~~& \$~~~~~ \\
\multicolumn{1}{|r|}{\{0.9\}} & & -6.2 \ & 4.6 \ & 2.9 \ & -\$~~~~~& -\$~~~~~ \\
& & & & & & \\
& -1.4444 \ & -0.15530 \ & -0.95580 \ & 1.1112 \ & 1.1111 \ & 0.13977 \ \\
& 2.3333 \ & \fbbox{\bf 2526.5}& -2526.7 \ & 0.26660 \ & 5053.2 \ & \fbbox{\bf 0.49998} \ \\
\end{tabular}\[1.0em]
\hspace*{0.5cm}
\begin{tabular}{|r|r|rr@{\quad}|@{\quad}r|}\hline
\multicolumn{1}{|r|}{\{}} & & \multicolumn{1}{|r|}{\{}} & & & & \\
\multicolumn{1}{|r|}{\{0.9\}} & & \multicolumn{1}{|r|}{\{-6.2\}} & & 4.6 \ & 2.9 \ & \\
\multicolumn{1}{|r|}{\{}} & & \multicolumn{1}{|r|}{\{}} & & & & \\
& & \multicolumn{1}{|r|}{\{}} & & & & \\
& 2.3333 \ & \multicolumn{1}{|r|}{\{2526.5\}} & & -2526.7& \$~~~~~!& -0.26660 \ \\
\multicolumn{1}{|r|}{\{}} & & & & & & \\
\multicolumn{1}{|r|}{\{-1.4444\}} & & -0.61468E-4 & & -1.1111 \ & -1.1112 \ & \\
\end{tabular}\[1.0em]

\item {\bf VGA}\[0.4em]
\hspace*{0.5cm}
\begin{array}{l}
\underline{\text{Beispiel:}} \$~n=3$, mit Spaltenpivotsuche\[0.4em]
Permutationsvektor f"ur Zeilenvertauschungen \$~p=(p_1,p_2,p_3)\[0.2em]
Initialisierung \$~p=(1,2,3)\[2em]
\begin{array}{l}
\$ A^{(0)} = \$ & \$ \left( \begin{array}{ccc|ccc}
\framebox{1} & 1 & 1 & \\
\hline
\hline
\hline
\hline
\hline
\hline
\end{array} \right) \$ & \$ \quad \\
\$ \begin{array}{l}
~x_1 + ~x_2 + ~x_3 = & y_1 & \rightarrow ~x_1 = y_1 - x_2 - x_3 \\
~x_1 + 2x_2 + 3x_3 = & y_2 & \\
~x_1 + 3x_2 + 6x_3 = & y_3 & 
\end{array} \\
\end{array} \$ \quad \$ \quad \$ p=(1,2,3) \$ \quad \$ \\
\$ A^{(1)} = \$ & \$ \left( \begin{array}{ccc|ccc}
1 & -1 & & -1 & \\
1 & \hline
1 & \hline
1 & \hline
\end{array} \right) \$ & \$ \quad \\
\$ \begin{array}{l}
~y_1 + ~x_2 + ~x_3 = & x_1 & \\
~y_1 + ~x_2 + 2x_3 = & y_2 & \\
~y_1 + 2x_2 + 5x_3 = & y_3 & 
\end{array} \\
\rightarrow ~\mbox{Zeilenvertauschung} ~2 \rightarrow \leftarrow 3 \\
\end{array} \$ \quad \$ \\
\$ \tilde{A}^{(1)} = \$ & \$ \left( \begin{array}{ccc|ccc}
1 & -1 & & -1 & \\
1 & \hline
1 & \hline
1 & \hline
\end{array} \right) \$ & \$ \quad \\
\end{array} \$ & \$ \quad \$

```

```


$$\begin{array}{rcl} y_1 - x_2 - x_3 & = & x_1 \\ y_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & \tilde{y}_2 \rightarrow \\ y_1 + x_2 + 2x_3 & = & \tilde{y}_3 \end{array}$$


$$\quad \& \quad \text{p}=(1,3,2), \tilde{y}_2=y_3, \tilde{y}_3=y_2$$


```

Rechenzeiten

n	Rechenzeit	gr"o"ser als
10	0.0036 Sekunden	
15	23.4 Minuten	
20	77.2 Jahre	
30	8.41 Milliarden	$\approx 8.41 \cdot 10^{15}$ Jahre

Rechenzeiten mit GKF

n	Zeit	Quotienten
50	0.3	
100	2.5	8.3
150	9	3.6
200	25	2.8
250	50	2.0
300	90	1.8
400	220	2.4
720	≈ 21 min	5.7
1700	≈ 4.5 h	12.9

Vergleich von Rechenzeiten mit verschiedenen GKF

n	ohne	mit	extended
50	0.6	0.4	0.3
100	4.8	3.8	2.5
150	17	13	9
200	42	32	25
250	82	64	50
300	142	111	90

Rechenzeiten

Verfahren	TC 1.0	BC 3.1	BC 4.5	TP 6.0	TP 7.0	BP 7.0
STD	26.852	25.211	26.750	29.00	27.57	30.37
M=2	23.680	21.309	22.520	25.42	26.64	26.86
M=4	23.008	20.492	21.469	24.06	25.01	25.37
M=8	22.680	19.609	20.441	24.03	25.00	25.35


```

p5 & 501 & 145.5 & 541 & 387 \\
p6 & 612 & 90.0 & 652 & 467 \\
& & & & \\[-2ex] \hline
\verb|zi02_a6*.ps|& & & & \\
p & 572 & 110.0 & 612 & 438 \\[0.4ex] \hline
\end{tabular}\\[0.4em]
{\bf Tab.10.} Bildh"ohen $h$ und Leerr"aume $r$ vor und nach der Graphik,\\
\hspace*{1.55cm} $w=612,~h+2r=792,~r'=20$, \\
\hspace*{1.55cm} Skalierungsma"sstab in $\backslash$backslash$\verb|epsfysize y pt|\\[1em]

\newpage
\item {\bf Rekursion}\\[0.4em]
In der GK-Arithmetik in Turbo Pascal mit den Zahlenformaten
$double$ (15-16 dezimale Mantissenstellen) und $extended$
(19-20 Mantissenstellen, 18 Stellen werden angezeigt)
sowie mit einem bestm"oglichen Startwert $I_0$, wandert pro
Rekursionsschritt die erste ung"ultige Mantissenstelle um
durchschnittlich eine Position nach links.\\[0.5em]
\begin{tabular}{|@{\quad} r @{\quad}|@{\quad} c @{\quad}| l @{\quad}| @{\quad} l @{\quad} |}\hline
& & \multicolumn{2}{c|}{ } & \\[-1.2ex]
& & \multicolumn{2}{c|}{ $I_n$ mit Rekursion und GK-Format}\\
& \raisebox{1.5ex}{[-1.5ex]}{$I_n$} & \multicolumn{2}{c|}{ } & \\[-1.7ex] \cline{3-4}
& & & & \\[-1.7ex]
n & auf 20 Dezimalstellen & $~~~~~double$ & & $~~~~~extended$ & \\
& genau & $~16$ Nachkommastellen & & $~18$ Nachkommastellen & $~$ \\
& & & & & \\[-1.7ex] \hline \hline
& & & & & \\[-2ex]
0 & 0.63212055882855767840 & $\\;$ {\sbf 0.6321205588285577}$\\;$ & & {\sbf 0.632120558828557678}$\\;$ & $\\$ \\
1 & 0.36787944117144232160 & $\\;$ {\sbf 0.3678794411714423}$\\;$ & & {\sbf 0.367879441171442322}$\\;$ & $\\$ \\
2 & 0.26424111765711535681 & $\\;$ {\sbf 0.2642411176571153}$\\;$ & & {\sbf 0.264241117657115357}$\\;$ & $\\$ \\
3 & 0.20727664702865392957 & $\\;$ {\sbf 0.207276647028654}\\ 0 & & {\sbf 0.207276647028653930}$\\;$ & $\\$ \\
4 & 0.17089341188538428171 & $\\;$ {\sbf 0.170893411885384}\\ 0 & & {\sbf 0.17089341188538428}\\ 1 & \\
5 & 0.14553294057307859146 & $\\;$ {\sbf 0.14553294057308}\\ 01 & & {\sbf 0.14553294057307859}\\ 3 & \\
6 & 0.12680235656152845122 & $\\;$ {\sbf 0.1268023565615}\\ 195 & & {\sbf 0.1268023565615284}\\ 41 & \\
7 & 0.11238350406930084144 & $\\;$ {\sbf 0.1123835040693}\\ 635 & & {\sbf 0.112383504069300}\\ 915 & \\
8 & 0.10093196744559326848 & $\\;$ {\sbf 0.100931967445}\\ 0921 & & {\sbf 0.10093196744559}\\ 2678 & \\
9 & 0.09161229298966058367 & $\\;$ {\sbf 0.09161229299}\\ 41707 & & {\sbf 0.09161229298966}\\ 5896 & \\
10 & 0.08387707010339416334 & $\\;$ {\sbf 0.0838770700}\\ 582927 & & {\sbf 0.0838770701033}\\ 41042 & \\
11 & 0.07735222886266420323 & $\\;$ {\sbf 0.077352229}\\ 3587803 & & {\sbf 0.077352228863}\\ 248537 & \\
12 & 0.07177325364802956125 & $\\;$ {\sbf 0.07177324}\\ 76946367 & & {\sbf 0.07177325364}\\ 1017554 & \\
13 & 0.06694770257561570369 & $\\;$ {\sbf 0.0669477}\\ 799697233 & & {\sbf 0.066947702}\\ 666771802 & \\
14 & 0.06273216394138014834 & $\\;$ {\sbf 0.06273}\\ 10804238732 & & {\sbf 0.06273216}\\ 2665194768 & \\
15 & 0.05901754087929777487 & $\\;$ {\sbf 0.0590}\\ 337936419019 & & {\sbf 0.0590175}\\ 60022078475 & \\
16 & 0.05571934593123560215 & $\\;$ {\sbf 0.055}\\ 4593017295701 & & {\sbf 0.055719}\\ 039646744406 & \\
17 & 0.05277111916899476344 & $\\;$ {\sbf 0.05}\\ 71918705973076 & & {\sbf 0.05277}\\ 6326005345098 & \\
18 & 0.05011985495809425803 & $-{\sbf 0.0}\\ 294536707515363 & & {\sbf 0.050}\\ 026131903788240 & \\
19 & 0.04772275579620909737 & $~1.5596197442791890$\\;$ & & {\sbf 0.04}\\ 9503493828023437 & \\
20 & 0.04554488407581805262 & $!-30.1923948855837807$\\;$ & & {\sbf 0.0}\\ 09930123439531258 & \\[0.8ex] \hline
\end{tabular}\\[1em]
{\bf Tab.1.} Rekursion $~I_n = 1-n~I_{n-1},~n=1,2,\dots,20,~I_0$ maximal genau.\\[1em]
%
\begin{tabular}{|@{\quad} r @{\quad}|@{\quad} rrr @{\quad}|}\hline
\multicolumn{4}{c|}{ } & \\[-1.5ex]
\multicolumn{4}{c|}{ $~~~~~$ Startintervall $~I_0$ : [ 0.632120 , 0.632121 ] } & \\[-2ex] \hline
\multicolumn{4}{c|}{ } & \\[-2ex]
& \multicolumn{3}{c|}{ } & \\[-2ex]
n & \multicolumn{3}{c|}{ } { $~$ [ inf$~(I_n)~,~$ sup$~(I_n)$ ] \quad\quad } & \\
& & & & \\[-2ex] \hline \hline
& & & & \\[-2ex]
0 & [ & $~~~~~$6.32119E-001, & & $~~~~~$6.32122E-001\ ] & \\
1 & [ & 3.67878E-001, & & 3.67881E-001\ ] & \\
2 & [ & 2.64239E-001, & & 2.64243E-001\ ] & \\
3 & [ & 2.0727E-001, & & 2.0729E-001\ ] & \\
4 & [ & 1.708E-001, & & 1.710E-001\ ] & \\
5 & [ & 1.454E-001, & & 1.457E-001\ ] &

```



```

6 & [ & 1.26E-001, & 1.28E-001\ ] \\\
7 & [ & 1.1E-001, & 1.2E-001\ ] \\\
8 & [ & 7.8E-002, & 1.2E-001\ ] \\\
9 & [ & -6.9E-002, & 3.0E-001\ ] \\\
10 & [ & -2.0E$\!+\!$000, & 1.7E$\!+\!$000\ ] \\\
11 & [ & -1.8E$\!+\!$001, & 2.3E$\!+\!$001\ ] \\\
12 & [ & -2.7E$\!+\!$002, & 2.2E$\!+\!$002\ ] \\\
13 & [ & -2.8E$\!+\!$003, & 3.5E$\!+\!$003\ ] \\\
14 & [ & -4.9E$\!+\!$004, & 3.9E$\!+\!$004\ ] \\\
15 & [ & -5.8E$\!+\!$005, & 7.4E$\!+\!$005\ ] \\\[0.5ex]\hline
\end{tabular}\}\[1em]
%
\begin{tabular}{|@{\quad} r @{\quad} rrr @{\quad}|} \hline
\multicolumn{4}{|c|}{ } \\\[-1.5ex]
\multicolumn{4}{|c|}{ $~~~~~$ Startintervall $~I_0$ : [ 0.63212 , 0.63212 ] } \\\
\multicolumn{4}{|c|}{ } \\\[-2ex]\hline
& \multicolumn{3}{c|}{ } \\\[-2ex]
n & \multicolumn{3}{c|}{ { $~$ [ inf$(I_n) ~,~$ sup$(I_n) ] \quad\quad } } \\\
& & & \\\[-2ex]\hline\hline
& & & \\\[-2ex]
0 & [ & 6.321199999999999E-001, & 6.321200000000001E-001\ ] \\\
1 & [ & 3.678799999999999E-001, & 3.678800000000001E-001\ ] \\\
2 & [ & 2.642399999999998E-001, & 2.642400000000001E-001\ ] \\\
3 & [ & 2.072799999999999E-001, & 2.072800000000001E-001\ ] \\\
4 & [ & 1.708799999999999E-001, & 1.708800000000001E-001\ ] \\\
5 & [ & 1.455999999999999E-001, & 1.456000000000002E-001\ ] \\\
6 & [ & 1.263999999999999E-001, & 1.264000000000001E-001\ ] \\\
7 & [ & 1.151999999999999E-001, & 1.152000000000001E-001\ ] \\\
8 & [ & 7.839999999999999E-002, & 7.840000000000001E-002\ ] \\\
9 & [ & 2.943999999999999E-001, & 2.944000000000001E-001\ ] \\\
10 & [ & -1.944000001E$\!+\!$000, & -1.943999999E$\!+\!$000\ ] \\\
11 & [ & 2.238399999E$\!+\!$001, & 2.238400001E$\!+\!$001\ ] \\\
12 & [ & -2.676080001E$\!+\!$002, & -2.676007999E$\!+\!$002\ ] \\\
13 & [ & 3.479903999E$\!+\!$003, & 3.479904001E$\!+\!$003\ ] \\\
14 & [ & -4.871765601E$\!+\!$004, & -4.871765599E$\!+\!$004\ ] \\\
15 & [ & 7.307658399E$\!+\!$005, & 7.307658402E$\!+\!$005\ ] \\\[0.5ex]\hline
\end{tabular}\}\[0.4em]
{\bf Tab.2.} Rekursion $~I_n = 1-n I_{n-1}, ~n=1,2,\dots,15, ~I_0$ gegeben, \\\
\hspace*{3.2em} mit Pascal-XSC und Intervallararithmetik. \\\[1em]

\item {\bf R"uckw"artsrekursion}\[0.4em]
\begin{tabular}{|@{\quad} r @{\quad} c | c |} \hline
& \multicolumn{2}{c|}{ } \\\[-1.5ex]
& \multicolumn{2}{c|}{ $~\tilde{I}_n$ mit R"uckw"artsrekursion } \\\
& \multicolumn{2}{c|}{ } \\\[-1.5ex]\cline{2-3}
n & & \\\[-1.5ex]
& $~\tilde{I}_{10}=1/12$ & $~\tilde{I}_{10}=1/11$ \\\
& & \\\[-1.5ex]\hline\hline
& & \\\[-1.5ex]
10 & {\sbf 0.083}\ 333333333333 & {\sbf 0.0}\ 9090909090909 \\\
9 & {\sbf 0.0916}\ 666666666667 & {\sbf 0.09}\ 090909090909 \\\
8 & {\sbf 0.1009}\ 259259259259 & {\sbf 0.101}\ 01010101010 \\\
7 & {\sbf 0.11238}\ 42592592593 & {\sbf 0.1123}\ 73737373737 \\\
6 & {\sbf 0.126802}\ 2486772487 & {\sbf 0.12680}\ 37518037518 \\\
5 & {\sbf 0.1455329}\ 585537919 & {\sbf 0.145532}\ 7080327080 \\\
4 & {\sbf 0.17089340}\ 82892416 & {\sbf 0.1708934}\ 583934584 \\\
3 & {\sbf 0.207276647}\ 9276896 & {\sbf 0.2072766}\ 354016354 \\\
2 & {\sbf 0.264241117}\ 3574368 & {\sbf 0.26424112}\ 15327882 \\\
1 & {\sbf 0.367879441}\ 3212816 & {\sbf 0.36787943}\ 92336059 \\\
0 & {\sbf 0.632120558}\ 6787184 & {\sbf 0.63212056}\ 07663941 \\\[1ex] \hline
\end{tabular}
\parbox[t]{15em}{\bf Tab.3.}\hspace*{0.2em} R"uckw"artsrekursion\hspace*{0.2em}
$~\tilde{I}_{n-1} = (1-\tilde{I}_n)/n, $~\hspace*{0.2em}
$~n=10,9,\dots,1, $~\hspace*{0.2em}
$~\tilde{I}_{10}$ gegeben, \hspace*{0.2em}

```

```

\hspace*{0.2em} Turbo Pascal mit\\
\hspace*{0.2em} GK-Format $double$.\\}\\

\item {\bf Varianten f"ur $\pi$}\\[0.4em]
\begin{tabular}{|@{\quad}r @{\quad}|cc @{\quad}|cc @{\quad}|}\hline
& & & \\[-0.5ex]
& \multicolumn{2}{c|}{Variante 1} & \multicolumn{2}{c|}{Variante 2}\\
& & \\[-1ex] \cline{2-5}
& & \\[-1ex]
j & $\sim s_{2n} \backslash != \backslash \sqrt{2} \backslash != \backslash \sqrt{4} \backslash != \backslash s^2_{2n}$ & & $\pi^{(1)}$ & & \\
& $\sim s_{2n} \backslash != \backslash \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2} \backslash != \backslash \sqrt{4} \backslash != \backslash s^2_{2n}}}$ & & $\pi^{(2)}$ & & \\
& \raisebox{1.5ex}{-1.5ex} {$s_n=6*2^j$} & & & \\[-1ex] \hline
& & & & \\[-2ex]
0 & 1.0000000000E-00 & 3.0000000000 & 1.0000000000E-00 & 3.0000000000 \\
1 & 5.1763809020E-01 & 3.1058285412 & 5.1763809020E-01 & 3.1058285412 \\
2 & 2.6105238444E-01 & 3.1326286132 & 2.6105238444E-01 & 3.1326286133 \\
3 & 1.3080625846E-01 & 3.1393502029 & 1.3080625846E-01 & 3.1393502030 \\
4 & 6.5438165642E-02 & 3.1410319508 & 6.5438165643E-02 & 3.1410319509 \\
5 & 3.2723463242E-02 & 3.1414524712 & 3.2723463253E-02 & 3.1414524723 \\
.. & .. & & .. & \\
17 & 7.9790117887E-06 & 3.1374750995 & 7.9894832701E-06 & 3.1415926535 \\
18 & 3.8146972656E-06 & 3.0000000000 & 3.9947416351E-06 & 3.1415926536 \\
19 & 1.9073486328E-06 & 3.0000000000 & 1.9973708175E-06 & 3.1415926536 \\
20 & 0.0000000000E-00 & 0.0000000000 & 9.9868540877E-07 & 3.1415926536 \\
21 & 0.0000000000E-00 & 0.0000000000 & 4.9934270438E-07 & 3.1415926536 \\[-1ex] \hline
\end{tabular}\\[0.4em]
{\bf Tab.8.} $\pi$ nach Archimedes mit einbeschriebenen Vielecken,\\
\hspace*{3.2em} Turbo Pascal mit GK-Format $real$

\newpage
\item {\bf Quadratur von Newton-Cotes, Tschebyscheff und Gau"s-Legendre sowie
Gau"s-Tschebyscheff}
$$ I = \int\limits_{-1}^1 x^8 dx = \frac{2}{9} = 0.222\overline{2} $$$
\begin{tabular}{|c|c|c|}\hline
& & \\[-1.0ex]
n & Newton-Cotes & Tschebyscheff & Gau"s-Legendre \\
& $N_{n+1}$ & $T_{n+1}$ & $G_{n+1}$ \\
& & & \\[-1.2ex] \hline
& & & \\[-1.6ex]
0 & & 0 & $T_1$ \\
1 & 2 & 0.024\ 691\ 4 & $T_2$ \\
2 & 0.666\ 667 & 0.083\ 333 & 0.144\ 000 \\
3 & 0.500\ 229 & 0.159\ 012 & 0.159\ 012 \\
4 & 0.316\ 667 & 0.184\ 876 & 0.222\ 222 \\
5 & 0.281\ 387 & 0.212\ 063 & 0.222\ 222 \\[-1ex] \hline
\end{tabular}

\item {\bf Quadratur von Gau"s-Tschebyscheff und Gau"s-Legendre}
$$ I = \int\limits_{-1}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2.403\overline{939}\overline{430}\overline{634}\overline{41} $$$
\begin{tabular}{|c|c|c|c|c|c|}\hline
& & & & & \\[-1.0ex]
n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
& & & & & \\[-1.0ex]
$GT_{n+1}$ & $\pi=3.141\ 593$ & 2.388\ 379 & 2.404\ 071 & 2.403\ 938 & 839 & 2.403\ 939 & 432 \\
$G_{n+1}$ & 2 & 2.052\ 456 & 2.144\ 494 & 2.199\ 201 & 227 & 2.235\ 232 & 015 \\[-1ex] \hline
\end{tabular}

\item {\bf Quadratur von Gau"s-Tschebyscheff und Gau"s-Legendre}
$$ I = \int\limits_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int\limits_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} = 1.570\overline{796} $$$
\begin{tabular}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline
& & & & & & & & & & \\[-1.0ex]
n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 18 & 19 & 28 & 29 \\[-1ex] \hline

```



```

\end{tabular}

\item {\bf Zu Symbolen der Zeichensprache im Rechnernetz}\\[0.2em]
\begin{tabular}{|l|l|}\hline
& & \\[-0.8em]
Smiley & \hspace{2.5cm} Bedeutung & \\
& & \\[-0.8em]
& & \\[-0.8em]
MfG & Mit freundlichen Gr"u"ssen & \\
$<g>$ & Grinsen & \\
$<bg>$ & Breites Grinsen & \\
bbl & be back later (bin bald zur"uck) & \\
CU & see you (auf Wiedersehen) & \\
fyi & for your information (zu deiner Info) & \\
rofl & rolling on the floor and laughing (auf dem Boden w"alzen und lachen) & \\
gd\&r & grinning, ducking and running (grinsen, ducken und weg) & \\
PMFJI & pardon me for jumping in (entschuldige, da"s ich mich einmische)\\[-1.0em]
& & \\
\end{tabular}\\[0.2em]
%
\begin{tabular}{|@{\quad}l|l|l|l|}\hline
& & & & \\[-0.6em]
Smiley & \hspace{1.3cm} Bedeutung & $~~~~~$ & Smiley & \hspace{1.5cm} Bedeutung & \\
& & & & & \\[-0.6em]
& & & & & \\[-0.6em]
:-i & weder gl"ucklich, noch & & $[:-)$ & man hat gerade die & \\
& traurig, eben so lala & & & Kopfh"orer "ubergest"ulpt & \\
:-( & traurig & & :-<$ & sehr traurig, Anbaggern zwecklos & \\
:-) & lustig, Lachen, happy & & :-|$ & ver"argert & \\
;-) & Zwinkern & & (-: & Linksh"ander & \\
:-D & Hahaha! & & & 8-) & Brillentr"ager & \\
:-o & "uberrascht, geschockt & & :-Q & Raucher & \\
O:-) & Beule & & & =:-) & Irokese & \\
:-)= & Szeneb"artchen & & & :* & angetrunken & \\
:-O & Quatschkopf & & & & & & $~$*~$<$:-)$ & Weihnachtsmann & \\
(:$<$) & Schw"atzer, Labersack & & & & \\
& & & & & \\
\end{tabular}

\end{tabular}

\newpage
\item {\bf Praktikumsliste}\\[0.6em]
{\bf\Large TECHNISCHE UNIVERSIT"AT ILMEMAU}\\[0.4em]
Institut f"ur Mathematik\\[1em]}
{\large\bf Einschreibeliste f"ur das Praktikum
.....}\\[0.4em]
\thicklines
\put(0,0){\line(1,0){430}}
\begin{center}
{\bf\Large Nutzererkl"arung f"ur Praktikumssteilnehmer}\\
\end{center}
Der/Die Praktikumssteilnehmer/in erkl"art, da"s er/sie\\[0.8em]
1. die Nutzerordnung$~{1)}$ f"ur den Pool .....\\
\hspace*{0.26cm} zur Kenntnis genommen hat und diese einhalten wird.\\[0.8em]
2. sein/ihr LOGIN nicht an Dritte weitergeben wird.\\[0.8em]
3. die Bestimmungen der \S\S\ 69 a bis g$~{2)}$ des UrhG einhalten wird.\\[0.8em]
4. keine Software unberechtigterweise kopieren bzw. in das Netz einbringen wird.\\[1em]
Der/Die Praktikumssteilnehmer/in unterschreibt diese Bedingungen auf der
nachfolgenden Einschreibeliste f"ur das Praktikum .....
in dem Bewu"stsein, da"s er/sie bei einem Versto"s gegen diese
Bedingungen mit strafrechtlichen sowie disziplinarischen Konsequenzen und
Schadensersatzanspr"uchen der Technischen Universit"at Ilmenau zu rechnen hat.\\
\thicklines
\put(0,0){\line(1,0){100}}\\
\footnotesize $~{1)}$ \ Die Nutzerordnung liegt bzw. h"angt aus.\\
$~{2)}$ \ Der Text der \S\S\ 69 a bis g UrhG kann eingesehen werden.\\

```


4 Schemata

- Ermittlung der Normalform des Polynoms $\sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$

Anwendung des inversen Hornerschemas

	c_n					
$-x_{n-1}$	$a_0^{(0)} = c_n$	$a_1^{(0)} = c_{n-1}$	$-x_{n-1}a_0^{(0)}$			
$-x_{n-2}$	$a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$a_2^{(1)} = c_{n-2}$	$-x_{n-2}a_0^{(1)} \quad -x_{n-2}a_1^{(1)}$		
$-x_{n-3}$	$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	$\dots\dots\dots$		
$-x_0$	$a_0^{(n-1)}$	$a_1^{(n-1)}$	$a_2^{(n-1)}$	\dots	$a_{n-1}^{(n-1)}$	$a_n^{(n-1)} = c_0$
		$-x_0a_0^{(n-1)}$	$-x_0a_1^{(n-1)}$	\dots	$-x_0a_{n-2}^{(n-1)}$	$-x_0a_{n-1}^{(n-1)}$
	$a_0^{(n)}$	$a_1^{(n)}$	$a_2^{(n)}$	\dots	$a_{n-1}^{(n)}$	$a_n^{(n)}$
	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-1}	a_n

In den jeweiligen Spalten wird die Summe gebildet, d.h.

$$a_0^{(k)} = a_0^{(k-1)}, \quad a_j^{(k)} = a_j^{(k-1)} + (-x_{n-k} a_{j-1}^{(k-1)}), \quad j \geq 1.$$

Die letzte Zeile und somit die Koeffizienten der Normalform ergeben sich zu $a_i = a_i^{(n)}$.

- **Einfaches Hornerschema** zur Berechnung von $p_n(x_0)$.

Es entsteht durch sukzessives Ausklammern von x in der Normalform.

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \\
 &= (a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1})x + a_n \\
 &= ([a_0x^{n-2} + a_1x^{n-3} + \dots + a_{n-2}]x + a_{n-1})x + a_n \\
 &= \dots \\
 &= \underbrace{([\dots \underbrace{\underbrace{a_0}_{b_0} x + a_1]}_{b_1} x + \dots + a_{n-2}]x + a_{n-1})}_{b_{n-1}} x + a_n
 \end{aligned}$$

x_0	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-1}	a_n
	b_0x_0	b_1x_0	\dots	$b_{n-2}x_0$	$b_{n-1}x_0$	
	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-1}	$b_n = p_n(x_0)$

- **Vollständiges Hornerschema**

Berechnung von

$$p_n(x_0) = b_n^{(0)}, p'_n(x_0) = b_{n-1}^{(1)}, p''_n(x_0) = 2! b_{n-2}^{(2)}, \dots, p_n^{(n)}(x_0) = n! b_0^{(n)}.$$

Es gilt $p_n^{(n)}(x_0) = n!a_0$, $p_n^{(k)}(x) = 0$ für $k > n$.

x_0	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
	$b_0^{(0)}x_0$	$b_1^{(0)}x_0$	\dots	$b_{n-4}^{(0)}x_0$	$b_{n-3}^{(0)}x_0$	$b_{n-2}^{(0)}x_0$	$b_{n-1}^{(0)}x_0$	
x_0	$b_0^{(0)}$	$b_1^{(0)}$	$b_2^{(0)}$	\dots	$b_{n-3}^{(0)}$	$b_{n-2}^{(0)}$	$b_{n-1}^{(0)}$	$b_n^{(0)} = p_n(x_0)$
	$b_0^{(1)}x_0$	$b_1^{(1)}x_0$	\dots	$b_{n-4}^{(1)}x_0$	$b_{n-3}^{(1)}x_0$	$b_{n-2}^{(1)}x_0$	$b_{n-1}^{(1)}x_0$	
x_0	$b_0^{(1)}$	$b_1^{(1)}$	$b_2^{(1)}$	\dots	$b_{n-3}^{(1)}$	$b_{n-2}^{(1)}$	$b_{n-1}^{(1)} = p_{n-1}(x_0)$	
	$b_0^{(2)}x_0$	$b_1^{(2)}x_0$	\dots	$b_{n-4}^{(2)}x_0$	$b_{n-3}^{(2)}x_0$	$b_{n-2}^{(2)}x_0$		
	$b_0^{(2)}$	$b_1^{(2)}$	$b_2^{(2)}$	\dots	$b_{n-3}^{(2)}$	$b_{n-2}^{(2)} = p_{n-2}(x_0)$		
$\dots\dots$								
x_0	$\dots\dots$							
x_0	$b_0^{(n-2)}$	$b_1^{(n-2)}$	$b_2^{(n-2)}$	\dots	$b_{n-3}^{(n-2)}$	$b_{n-2}^{(n-2)} = p_2(x_0)$		
	$b_0^{(n-1)}x_0$							
x_0	$b_0^{(n-1)}$	$b_1^{(n-1)} = p_1(x_0)$						
	$b_0^{(n)} = p_0(x_0)$							

$A^{(0)}$	$\boxed{4}$	1	8	3	Zeilenvertauschung $1 \leftrightarrow 2$
	$\boxed{0}$	1	-3	-4	Permutationsvektor $p = (2, 1, 3, 4)$
	$\boxed{2}$	0	8	5	
$\tilde{A}^{(0)}$	$\boxed{4}$	1	8	3	1. Zeile nach x_1 umstellen
	1	0	3	2	$4x_1 + x_2 + 8x_3 + 3x_4 = y_1$
	0	1	-3	-4	$\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 - \frac{3}{4}x_4 = x_1$
	2	0	8	5	x_1 in die Zeilen 2,3,4 einsetzen
$A^{(1)}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-2	$-\frac{3}{4}$	Pivotsuche in der 2. Spalte, Pivotel. $a_{32} = 1$
	$\frac{1}{4}$	$\boxed{-\frac{1}{4}}$	1	$\frac{5}{4}$	Zeilenvertauschung $2 \leftrightarrow 3$
	0	$\boxed{1}$	-3	-4	Permutationsvektor $p = (2, 3, 1, 4)$
	$\frac{1}{2}$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	4	$\frac{7}{2}$	
$\tilde{A}^{(1)}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-2	$-\frac{3}{4}$	2. Zeile nach x_2 umstellen
	0	$\boxed{1}$	-3	-4	$0y_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = y_2$
	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$0y_1 + y_2 + 3x_3 + 4x_4 = x_2$
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4	$\frac{7}{2}$	x_2 in die Zeilen 1,3,4 einsetzen
$A^{(2)}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{7}{4}$	Pivotsuche in der 3. Spalte, Pivotel. $a_{43} = \frac{5}{2}$
	0	1	3	4	Zeilenvertauschung $3 \leftrightarrow 4$
	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{4}$	Permutationsvektor $p = (2, 3, 4, 1)$
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	$\frac{3}{2}$	
$\tilde{A}^{(2)}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{7}{4}$	3. Zeile nach x_3 umstellen
	0	1	3	4	$\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 = y_3$
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 + \frac{2}{5}y_3 - \frac{3}{5}x_4 = x_3$
	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	x_3 in die Zeilen 1,2,4 einsetzen
$A^{(3)}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{11}{10}$	$-\frac{1}{10}$	keine Pivotsuche in der 4. Spalte, Pivotel. $a_{43} = \frac{1}{10}$
	$-\frac{3}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{11}{5}$	keine Zeilenvertauschung
	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	Permutationsvektor bleibt $p = (2, 3, 4, 1)$
	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\boxed{\frac{1}{10}}$	4. Zeile nach x_4 umstellen
					$\frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2 + \frac{1}{10}y_3 + \frac{1}{10}x_4 = y_4$
					$-2y_1 + 2y_2 - y_3 + 10y_4 = x_4$
					x_4 in die Zeilen 1,2,3 einsetzen
$A^{(4)}$	1	-1	-1	-1	
	-5	6	-1	22	
	1	-1	1	-6	
	-2	2	-1	10	

- **Allgemeine Form des Parameterschemas eines r -stufigen ESV der Ordnung p ($r \geq p$)**
 (r, p) -Schema

a	B	α	β	$\alpha_1 = 0$						
	c^T		γ	α_2	β_{21}					
				α_3	β_{31}	β_{32}				
				α_4	β_{41}	β_{42}	β_{43}			
						
				α_r	β_{r1}	β_{r2}	β_{r3}	...	$\beta_{r,r-1}$	
				1	γ_1	γ_2	γ_3	...	γ_{r-1}	γ_r

- **Explizite r -stufige MSV 4.Ordnung**

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= \sum_{j=0}^{r-1} (\alpha'_j y_{n+1-r+j} + h\beta'_j f_{n+1-r+j}), \quad f_k = f(x_k, y_k), \quad \text{Ordnung } p = 4 \\
 &\quad \text{i.a. Stufenzahl } r = 4 \\
 &= \alpha'_3 y_n + \alpha'_2 y_{n-1} + \alpha'_1 y_{n-2} + \alpha'_0 y_{n-3} + h(\beta'_3 f_n + \beta'_2 f_{n-1} + \beta'_1 f_{n-2} + \beta'_0 f_{n-3}) \\
 \text{Fehler} &= ch^4 f^{(5)}(\xi)
 \end{aligned}$$

MSV	r	Gewichte								c
		α'_3	α'_2	α'_1	α'_0	β'_3	β'_2	β'_1	β'_0	
Adams-Bashforth	4	1				$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$	$\frac{251}{720}$
Adams-Störmer, mod.	4		1			$\frac{8}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{232}{720}$
	4			1		$\frac{21}{8}$	$-\frac{9}{8}$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{243}{720}$
Milne	4				1	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$		$\frac{224}{720}$
	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{91}{36}$	$-\frac{63}{36}$	$\frac{57}{36}$	$-\frac{13}{36}$	$\frac{242}{720}$
	3	-9	9	1		6	6			$\frac{72}{720}$

Nicht notierte Gewichte sind Null, r Stufen, c Koeffizient in Fehlerformel.

• Implizite r -stufige MSV 4.Ordnung

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{r-1} (\alpha'_j y_{n+1-r+j} + h\beta'_j f_{n+1-r+j}) + h\beta'_r f_{n+1}, \quad \text{Ordnung } p = 4$$

i.a. Stufenzahl $r = 3$

$$= \alpha'_2 y_n + \alpha'_1 y_{n-1} + \alpha'_0 y_{n-2} + h(\beta'_3 f_{n+1} + \beta'_2 f_n + \beta'_1 f_{n-1} + \beta'_0 f_{n-2})$$

$$\text{Fehler} = ch^4 f^{(5)}(\xi)$$

Für die Erreichung der Ordnung 4 muß die Formel für die Polynome $1, x, x^2, x^3, x^4$ genau sein. Aus den 5 Bedingungen lassen sich im Normalfall die Koeffizienten $\alpha'_2, \alpha'_1, \alpha'_0, \beta'_3, \beta'_2$ eindeutig bestimmen.

Nimmt man das Glied $\beta'_1 f_{n-1}$ dazu, dann bleibt in der Formel ein freier Parameter α , bei einem weiteren Glied $\beta'_0 f_{n-2}$ kann man z.B. noch gewisse Rundungseigenschaften verbessern.

Das parametrisierte MSV(α) lautet

$$y_{n+1} = \frac{9}{8}(1 - \alpha)y_n + \alpha y_{n-1} - \frac{1}{8}(1 - \alpha)y_{n-2} + h[\frac{1}{24}(9 - \alpha)f_{n+1} + \frac{1}{12}(9 + 7\alpha)f_n + \frac{1}{24}(-9 + 17\alpha)f_{n-1}]$$

Die Formel ist stabil für $\alpha \in (-\frac{3}{5}, 1)$.

MSV	r	Gewichte							c
		α'_2	α'_1	α'_0	β'_3	β'_2	β'_1	β'_0	
Adams-Störmer ($\alpha = 1$)	2	1			$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{90}$
Adams-Moulton	3	1			$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$
$\alpha = -\frac{3}{5}$	3	$\frac{9}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$		$-\frac{1}{30}$
$\alpha = -\frac{9}{31}$	3	$\frac{45}{31}$	$-\frac{9}{31}$	$-\frac{5}{31}$	$\frac{12}{31}$	$\frac{18}{31}$	$\frac{18}{31}$		$-\frac{9}{310}$
$\alpha = -\frac{1}{7}$	3	$\frac{9}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{14}{21}$	$\frac{10}{21}$		$-\frac{17}{630}$
$\alpha = 0$	3	$\frac{9}{8}$		$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$-\frac{3}{8}$		$-\frac{1}{40}$
$\alpha = \frac{1}{9}$	3	1	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{22}{27}$	$-\frac{8}{27}$		$-\frac{19}{810}$
$\alpha = \frac{9}{17}$	3	$\frac{9}{17}$	$\frac{9}{17}$	$-\frac{1}{17}$	$\frac{6}{17}$	$\frac{18}{17}$			$-\frac{1}{90}$

- **Optimaler Weg im Tableau**

			$j \rightarrow$			
		1	2	3	4	5
						$n = 6$
i	1					
	2			p_{ij}		
\downarrow	3					
	$m = 4$					

$P(i, j)$ Zahl im Feld (i, j) ,

$D(i, j)$ Länge des Weges von $(1,1)$ nach (i, j)

Beispiel: $m = n = 4$, längster Weg=38

P				D				Q			
1	3	7	2	1	4	7	13		L	L	L
6	2	4	8		7	9	15	23	\uparrow		
8	4	9	7		15	19	28	35	O	L	O
5	2	1	3		20	22	29	38	\uparrow	O \leftarrow L \leftarrow L \leftarrow L	
											\uparrow
									O	L	O
											O

- **Kettenbrüche**

Kettenbrüche von rationalen, irrationalen Zahlen sowie quadratischen Irrationalzahlen. Rationale Zahlen $\frac{a}{b}$, $a, b > 0$ ganzzahlig, lassen sich in folgenden endlichen Kettenbruch entwickeln.

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}} \\
 &= [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \\
 &= a_0 + \frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \frac{1}{|a_3|} + \dots + \frac{1}{|a_n|}, \quad a_i \text{ ganzzahlig } \geq 1, \quad a_0 \geq 0
 \end{aligned}$$

Für irrationale Zahlen bricht das Verfahren nicht ab. Man erhält dann einen unendlichen Kettenbruch. Für quadratische Irrationalzahlen - das sind Lösungen einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten - erhält man einen periodischen Kettenbruch $[a_0; \text{period}(a_1, a_2, \dots, a_k)]$.

Beispiele:

$$\frac{225}{157} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} = [1; 2, 3, 4, 5]$$

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 21, 84, 2, 1, \dots]$$

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, \dots]$$

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = [1; \text{period}(2)]$$

$$\sqrt{3} - 1 = [0; \text{period}(1, 2)]$$

$$\sqrt{54} = [7; \text{period}(2, 1, 6, 1, 2, 14)],$$

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = [1; \text{period}(1)], \text{ goldene Schnittzahl}$$

• Sieb des Eratosthenes

Als erstes die Variante mittels eines Vektors $a[2..n]$.

Man belege die Vektorkomponenten gemäß $a_i = i$, $i = 2, 3, \dots, n$. Ausgehend von der mit 2 beginnenden Folge natürlichen Zahlen streiche man jeweils alle Vielfachen der ersten nicht gestrichenen Zahl $\leq [\sqrt{n}]$. Das Streichen kann z.B. durch Belegung mit einer 0 erfolgen, die Komponenten „fallen also durchs Sieb“.

Alle Nichtnullkomponenten des Vektors a sind dann die gesuchten Primzahlen.

Beispiel: $n = 14$, $[\sqrt{n}] = 3$

$a_2 = 2$	2	2			2
$a_3 = 3$	3	3	3	3	3
$a_4 = 4$	<u>4</u>	0	0	0	0
$a_5 = 5$	5	5	5	5	5
$a_6 = 6$	<u>6</u>	0	<u>0</u>	0	0
$a_7 = 7$	7	7	7	7	7
$a_8 = 8$	<u>8</u>	0	0	0	0
$a_9 = 9$	9	9	<u>9</u>	0	0
$a_{10} = 10$	<u>10</u>	0	0	0	0
$a_{11} = 11$	11	11	11	11	11
$a_{12} = 12$	<u>12</u>	0	<u>0</u>	0	0
$a_{13} = 13$	13	13	13	13	13
$a_{14} = 14$	<u>14</u>	0	0	0	0

4.1 Quelltexte

```

\begin{itemize}
\item {\bf Ermittlung der Normalform des Polynoms  $\sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$ }\\[0.4em]
    Anwendung des inversen Hornerchemas\\[1em]
    $\begin{array}{r|@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c}
        & c_n & & & & & & & & & \\
        & & & & & & & & & & \\
        -x_{n-1} & a^{(0)}_0=c_n & a^{(0)}_1=c_{n-1} & & & & & & & & \\
        & & -x_{n-1} a^{(0)}_0 & & & & & & & & \\
        & & & & & & & & & & \\
        -x_{n-2} & a^{(1)}_0 & a^{(1)}_1 & & a^{(1)}_2=c_{n-2} & & & & & & \\
        & & & & & -x_{n-2} a^{(1)}_0 & & & & & \\
        & & -x_{n-2} a^{(1)}_1 & & & & & & & & \\
        & & & & & & & & & & \\
        -x_{n-3} & a^{(2)}_0 & a^{(2)}_1 & & a^{(2)}_2 & & & & & & \\
        \multicolumn{1}{c}{\& \dots & & & & & & & & & \\
        & & & & & & & & & & \\
        & & & & & & & & & & \\
        -x_0 & a^{(n-1)}_0 & a^{(n-1)}_1 & & a^{(n-1)}_2 & & & & & & \\
        & & & a^{(n-1)}_{n-1} & a^{(n-1)}_n=c_0 & & & & & & \\
        & & & -x_0 a^{(n-1)}_0 & -x_0 a^{(n-1)}_1 & & & & & & \\
        & & & -x_0 a^{(n-1)}_{n-2} & -x_0 a^{(n-1)}_{n-1} & & & & & & \\
        & & & & & & & & & & \\
        & a^{(n)}_0 & a^{(n)}_1 & & a^{(n)}_2 & & & & & & \\
        & & & a^{(n)}_{n-1} & a^{(n)}_n & & & & & & \\
        & & & & & & & & & & \\
        & a_0 & a_1 & & a_2 & & \dots & & a_{n-1} & & a_n
    \end{array}$\\[2em]
    In den jeweiligen Spalten wird die Summe gebildet, d.h.\\[0.4em]
    \hspace*{1cm}  $a^{(k)}_0=a^{(k-1)}_0, \dots, a^{(k)}_j = a^{(k-1)}_j +$   

 $(-x_{n-k} a^{(k-1)}_{j-1}), j \geq 1$ .\\[0.4em]
    Die letzte Zeile und somit die Koeffizienten der Normalform ergeben sich  

    zu  $a_i=a^{(n)}_i$ .

\newpage
\item {\bf Einfaches Horner-schema} zur Berechnung von  $p_n(x_0)$ .\\[0.4em]
    Es entsteht durch sukzessives Ausklammern von  $x$  in der  

    Normalform.
    \begin{eqnarray*}
        p_n(x) &= & a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n \\
        &= & (a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x + a_{n-1}) x + a_n \\
        &= & ([a_0 x^{n-2} + a_1 x^{n-3} + \dots + a_{n-2}] x + a_{n-1}) x + a_n \\
        &= & \dots \\
        &= & (\underbrace{\dots}_{\underbrace{\underbrace{a_0}_{b_0}}_{a_1}_{b_1}}} x + \dots + a_{n-2}) x + a_{n-1} x + a_n
    \end{eqnarray*}
    \[
    \begin{array}{r|@{\quad}r@{\quad}r@{\quad}r@{\quad}r@{\quad}r@{\quad}r@{\quad}r@{\quad}r@{\quad}r}
        & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & & a_n \\
        x_0 & b_0 x_0 & b_1 x_0 & \dots & b_{n-2} x_0 & b_{n-1} x_0 & & \\
        & & & & & & & \\
        & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & & b_n=p_n(x_0)
    \end{array}
    \]

\item {\bf Vollst"andiges Horner-schema}\\
    Berechnung von \\[0.4em]
 $\tilde{p}_n(x_0)=b^{(0)}_n, \tilde{p}'_n(x_0)=b^{(1)}_{n-1},$   

 $\tilde{p}''_n(x_0)=2! b^{(2)}_{n-2}, \dots, \tilde{p}^{(n)}_n(x_0)=n! b^{(n)}_0$ .\\[0.4em]
    Es gilt  

 $\tilde{p}^{(n)}_n(x_0) = n! a_0, \tilde{p}^{(k)}_n(x_0)=0 \text{ f"ur } k > n$ .\\[1.5em]
    \scriptsize
    $\begin{array}{r|@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c}
        & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
        x_0 & b^{(0)}_0 x_0 & b^{(0)}_1 x_0 & \dots & b^{(0)}_{n-4} x_0 & & & & 
    \end{array}$

```



```

& $\frac{1}{4}$ & -$\frac{1}{4}$ & 1 & $\frac{5}{4}$ &
& $0y_1+y_2+3x_3+4x_4=x_2$\\[0.2em]
& $\frac{1}{2}$ & -$\frac{1}{2}$ & 4 & $\frac{7}{2}$ &
& $x_2$ in die Zeilen 1,3,4 einsetzen\\
& & & & & \\[-0.8em]\hline\hline
& & & & & \\[-0.8em]
& $\frac{1}{4}$ & -$\frac{1}{4}$ & -$\frac{11}{4}$ & &
& -$\frac{7}{4}$ & & Pivotsuche in der 3.Spalte, Pivotel.
& $a_{43}=\frac{5}{2}$\\[0.2em]
$A^{(2)}$ & 0 & 1 & 3 & 4 & Zeilenvertauschung $~3 \rightarrow 4$\\[0.2em]
& $\frac{1}{4}$ & -$\frac{1}{4}$ & & & $\dashbox{2}{(16,16)}{\frac{1}{4}}$ &
& $\frac{1}{4}$ & & Permutationsvektor $~p=(2,3,4,1)$\\[0.2em]
& $\frac{1}{2}$ & -$\frac{1}{2}$ & & & $\framebox{$\frac{5}{2}$} & $\frac{3}{2}$ & \\
& & & & & \\[-0.8em]\hline
& & & & & \\[-0.8em]
& $\frac{1}{4}$ & -$\frac{1}{4}$ & -$\frac{11}{4}$ & &
& -$\frac{7}{4}$ & & 3. Zeile nach $x_3$ umstellen\\[0.2em]
$\tilde{A}^{(2)}$
& 0 & 1 & 3 & 4 & $\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{5}{2}x_3+$
& & & & & $\frac{3}{2}x_4=y_3$\\[0.2em]
& $\frac{1}{2}$ & -$\frac{1}{2}$ & & & $\framebox{$\frac{5}{2}$} &
& $\frac{3}{2}$ & & -$\frac{1}{5}y_1+\frac{1}{5}y_2+$
& & & & & $\frac{2}{5}y_3-\frac{3}{5}x_4=x_3$\\[0.2em]
& $\frac{1}{4}$ & -$\frac{1}{4}$ & & & $\frac{1}{4}$ &
& & & & & $\frac{1}{4}$ & $x_3$ in die Zeilen 1,2,4 einsetzen\\
& & & & & \\[-0.8em]\hline\hline
& & & & & \\[-0.8em]
& $\frac{4}{5}$ & -$\frac{4}{5}$ & -$\frac{11}{10}$ & &
& -$\frac{1}{10}$ & & keine Pivotsuche in der 4.Spalte,
& & & & & Pivotel. $a_{43}=\frac{1}{10}$\\[0.2em]
$A^{(3)}$ & -$\frac{3}{5}$ & & $\frac{8}{5}$ & & -$\frac{6}{5}$ &
& & & $\frac{11}{5}$ & & keine Zeilenvertauschung\\[0.2em]
& -$\frac{1}{5}$ & & $\frac{1}{5}$ & & $\frac{2}{5}$ &
& & & -$\frac{3}{5}$ & & Permutationsvektor bleibt $~p=(2,3,4,1)$\\[0.2em]
& $\frac{1}{5}$ & & -$\frac{1}{5}$ & &
& & & $\frac{1}{10}$ & & $\framebox{$\frac{1}{10}$} &
& & & & & 4. Zeile nach $x_4$ umstellen\\
& & & & & $\frac{1}{5}y_1-\frac{1}{5}y_2+$
& & & & & $\frac{1}{10}y_3+\frac{1}{10}x_4=y_4$\\[0.2em]
& & & & & & & & & & $-2y_1+2y_2-y_3+10y_4=x_4$\\[0.2em]
& & & & & & & & & & $x_4$ in die Zeilen 1,2,3 einsetzen\\[0.2em]
& & & & & & & & & & \\[-0.8em]\hline\hline
& & & & & \\[-0.8em]
& 1 & -1 & -1 & -1 & \\
$A^{(4)}$ & -5 & 6 & -1 & 22 & \\
& 1 & -1 & 1 & -6 & \\
& -2 & 2 & -1 & 10 & \\
\end{tabular}

```

```

\newpage
\item {\bf Allgemeine Form des Parameterschemas eines $r$-stufigen ESV
der Ordnung $p$ ($r \geq p$)}\\
$(r,p)$-Schema\\[1em]
\hspace*{1cm}
\begin{tabular}{r|l}
a & B \\
& c^T
\end{tabular}\quad
\begin{tabular}{r|r}
$\alpha$ & $\beta$ \\
& $\gamma$
\end{tabular}\quad

```



```

\hspace*{1.3cm} $P$ \hspace{3.3cm} $D$ \hspace{3.5cm} $Q$\\[0.4em]
\begin{tabular}{|rrrr|}\hline
\ 1 & & 3 & & 7 & & 2 & \\
& & & & & & & \\
& & & & & & & \\
6 & 2 & & 4 & & 8 & & \\
& & & & & & & \\
8 & 4 & & 9 & & 7 & & \\
& & & & & & & \\
5 & 2 & & 1 & & 3 & & \\
\hline
\end{tabular}
\hspace{0.5cm}
\begin{tabular}{|r@{${}$!$}r@{${}$!$}r@{${}$!$}r|}\hline
{\bf 1}& 4 & 7 & 13 & \\
& & & & \\
{\bf 7}& 9 & 15 & 23 & \\
& & & & \\
{\bf 15}& & & & \\
& & & & \\
20 & 22 & 29 & & {\bf 38} \\
\hline
\end{tabular}
\hspace{0.5cm}
\begin{tabular}{|r@{${}$~!$}r@{${}$~!$}r@{${}$~!$}r|}\hline
& L & L & L & L & \\
$\uparrow$ & & & & & \\
{\bf 0}& L & 0 & L & L & \\
$\uparrow$ & & & & & \\
{\bf 0}& & & & & \\
& & & & & \\
0 & L & 0 & & {\bf 0} & \\
\hline
\end{tabular}
\end{tabular}

\item {\bf Kettenbr"uche}\\[0.4em]
Kettenbr"uche von rationalen, irrationalen Zahlen sowie quadratischen
Irrationalzahlen. Rationale Zahlen  $\frac{a}{b}$ ,  $a, b > 0$  ganzzahlig,
lassen sich in folgenden endlichen Kettenbruch entwickeln.
\begin{eqnarray*}
\frac{a}{b} & = & a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}} \\
& = & [a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_n] \\
& = & a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}}
\end{eqnarray*}
\end{eqnarray*}
F"ur irrationale Zahlen bricht das Verfahren nicht ab. Man erh"alt dann
einen unendlichen Kettenbruch. F"ur quadratische Irrationalzahlen -
das sind L"osungen einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen
Koeffizienten - erh"alt man einen periodischen Kettenbruch
 $[a_0 ; \text{period}(a_1, a_2, \dots, a_k)]$ .
{\bf Beispiele:}
\begin{eqnarray*}
\frac{225}{157} & = & 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \\
& = & [1 ; 2, 3, 4, 5] \\
\pi & = & [3 ; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 21, 84, 2, 1, \dots] \\
e & = & [2 ; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, \dots] \\
\sqrt{2} & = & [1 ; 2, 2, 2, \dots] = [1 ; \text{period}(2)] \\
\sqrt{3} - 1 & = & [0 ; \text{period}(1, 2)] \\
\sqrt{54} & = & [7 ; \text{period}(2, 1, 6, 1, 2, 14)], \\
\frac{\sqrt{5+1}}{2} & = & [1 ; \text{period}(1)], \sim \text{goldene Schnittzahl}
\end{eqnarray*}

```

```

\item {\bf Sieb des Eratosthenes}\\[0.4em]
  Als erstes die Variante mittels eines Vektors  $a[2..n]$ .\\
  Man belege die Vektorkomponenten gemäß  $a_i = i, i = 2, 3, \dots, n$ .
  Ausgehend von der mit  $2$  beginnenden Folge natürlicher Zahlen
  streiche man jeweils alle Vielfachen der ersten nicht gestrichenen
  Zahl  $\leq \sqrt{n}$ . Das Streichen kann z.B. durch Belegung mit
  einer  $0$  erfolgen, die Komponenten "fallen also durchs Sieb".\\
  Alle Nichtnullkomponenten des Vektors  $a$  sind dann die gesuchten
  Primzahlen.\\[0.8em]
  {\bf Beispiel:}  $n = 14, \sqrt{n} = 3$ \\[1em]
\hspace*{1.5cm}
\begin{tabular}{l|rr|rr|r}
\begin{tabular}{l}
 $a_2 = 2$ 
 $a_3 = 3$ 
 $a_4 = 4$ 
 $a_5 = 5$ 
 $a_6 = 6$ 
 $a_7 = 7$ 
 $a_8 = 8$ 
 $a_9 = 9$ 
 $a_{10} = 10$ 
 $a_{11} = 11$ 
 $a_{12} = 12$ 
 $a_{13} = 13$ 
 $a_{14} = 14$ 
\end{tabular}
&
\begin{tabular}{l}
 $\boxed{2}$ 
 $3$ 
 $\begin{smallmatrix} 4 \\ \text{\tiny{ul}} 4 \end{smallmatrix}$ 
 $5$ 
 $\begin{smallmatrix} 6 \\ \text{\tiny{ul}} 6 \end{smallmatrix}$ 
 $7$ 
 $\begin{smallmatrix} 8 \\ \text{\tiny{ul}} 8 \end{smallmatrix}$ 
 $9$ 
 $\begin{smallmatrix} 10 \\ \text{\tiny{ul}} 10 \end{smallmatrix}$ 
 $11$ 
 $\begin{smallmatrix} 12 \\ \text{\tiny{ul}} 12 \end{smallmatrix}$ 
 $13$ 
 $\begin{smallmatrix} 14 \\ \text{\tiny{ul}} 14 \end{smallmatrix}$ 
\end{tabular}
&
\begin{tabular}{l}
 $\boxed{2}$ 
 $0$ 
 $0$ 
 $0$ 
 $0$ 
 $0$ 
 $0$ 
 $0$ 
 $0$ 
 $0$ 
 $0$ 
 $0$ 
 $0$ 
\end{tabular}
&
\begin{tabular}{l}
 $2$ 
 $3$ 
 $0$ 
 $5$ 
 $0$ 
 $7$ 
 $0$ 
 $9$ 
 $0$ 
 $11$ 
 $0$ 
 $13$ 
 $0$ 
\end{tabular}
\end{tabular}
\end{itemize}

```

5 Symbole, Formeln

5.1 Symbole und Befehle im L^AT_EX-Layout

- Schriftgrößen

<code>\Huge</code>	Huge
<code>\huge</code>	huge
<code>\LARGE</code>	LARGE
<code>\Large</code>	Large
<code>\large</code>	large
<code>\normalsize</code>	normalsize
<code>\small</code>	small
<code>\footnotesize</code>	footnotesize
<code>\scriptsize</code>	scriptsize
<code>\tiny</code>	tiny

- Klammern

Mathematische Klammern treten im allgemeinen paarweise auf.

Oft werden in Formeln runde, eckige und/oder geschweifte Klammern verwendet: `() [] \{ \}`.

Eine Anpassung ihrer Größe an den Formelinhalt kann mittels `\left` und `\right` erfolgen, z.B.

`$ \left\{ \left[\left(... \right) \right] \right\} $.`

Soll eine der Klammerseiten entfallen, so ist anstelle des Klammersymbols ein Punkt zu setzen.

$$p(x) = 1 + \left(1 + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{120}x \right) x \right) x \right) x \right) x$$
$$\left. \begin{array}{l} 1 = x + y + z \\ 1 = x^2 + y^2 + z^2 \\ 1 = x^3 + y^3 + z^3 \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

Spezielle Klammern

`\lfloor \rfloor`: $[a]$, `\lceil \rceil`: $\lceil b \rceil$, `\langle \rangle`: $\langle c \rangle$.

- Punktfolgen

<code>\ldots</code>	<code>\dots</code>	low horizontal dots	...
<code>\vdots</code>		vertical dots	⋮
<code>\cdot</code>		center horizontal dot	⋅
<code>\cdots</code>		center horizontal dots	⋯
<code>\ddots</code>		diagonal dots	⋱

- Akzente und mathematische Akzente, Sonderbuchstaben

<code>\ "a "a</code>	ä	ähnlich	<code>\ .z</code>	ž	žel
<code>\ "o "o</code>	ö	öfter	<code>\ 'o</code>	ó	góra
<code>\ "u "u</code>	ü	über	<code>\ =1</code>	l̄	l̄ada
<code>\ "s "s</code>	ß	daß	<code>\ 'z</code>	ž	žle
<code>\ 'a \$\acute{a} a\$</code>	á	á	<code>\ 's</code>	ś	miś
<code>\ ^a \$\hat{a} a\$</code>	â	â	<code>\ 'c</code>	ć	czwierć
<code>\ 'a \$\grave{a} a\$</code>	à	à	<code>\ 'n</code>	ń	cień
<code>\ ~a \$\tilde{a} a\$</code>	ã	ã	<code>\ c e</code>	ę	się
<code>\ =a \$\bar{a} a\$</code>	ā	ā	<code>\ c a</code>	ą	dąb
<code>\$\overline{a} a\$</code>	\overline{a}		<code>\ L</code>	Ł	Łódź
<code>\ .a \$\dot{a} a\$</code>	ȁ	$\dot{a} = \frac{da(x)}{dx}$	<code>\ l</code>	ł	goło
<code>\$\ddot{a} a\$</code>	ä	ÿ(x)	<code>\ AA</code>	Å	Åke
<code>\ u a \$\breve{a} a\$</code>	ǎ	ǎ	<code>\ aa</code>	ǎ	
<code>\ v a \$\check{a} a\$</code>	ǎ	ǎ	<code>\ OE</code>	Œ	
<code>\ H a</code>	ǎ		<code>\ oe</code>	œ	
<code>\ c a</code>	ȁ		<code>\ O</code>	Ø	
<code>\ d a</code>	ȁ		<code>\ o</code>	ø	Nørsett
<code>\ b a \underline{a}</code>	\underline{a}	\underline{a}	<code>\ AE</code>	Æ	
<code>\$\underline{a} a\$</code>	\underline{a}		<code>\ ae</code>	æ	
<code>\ t a</code>	\hat{a}		<code>\ Bbb R\$</code>	\mathbb{R}	$\mathbb{R}^{n,n}, \mathbb{R}^{n \times n}$
<code>\ vec a</code>	\vec{a}	$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$	<code>\ cal O\$</code>	\mathcal{O}	$\mathcal{O}(n^2)$
<code>\$\widehat{a} a\$</code>	\widehat{a}		<code>\ Bbb C\$</code>	\mathbb{C}	\mathbb{C}^m
<code>\$\widetilde{a} a\$</code>	\widetilde{a}		<code>\ I!\!R\$</code>	\mathbb{R}	\mathbb{R}^3

- Griechische Buchstaben

Anwendung im mathematischen Modus.

<code>\$\alpha\$</code>	α	<code>\$\beta\$</code>	β	<code>\$\gamma\$</code>	γ	<code>\$\delta\$</code>	δ
<code>\$\epsilon\$</code>	ϵ	<code>\$\ varepsilon\$</code>	ε	<code>\$\zeta\$</code>	ζ	<code>\$\eta\$</code>	η
<code>\$\theta\$</code>	θ	<code>\$\vartheta\$</code>	ϑ	<code>\$\kappa\$</code>	κ	<code>\$\lambda\$</code>	λ
<code>\$\mu\$</code>	μ	<code>\$\nu\$</code>	ν	<code>\$\xi\$</code>	ξ	<code>\$\pi\$</code>	π
<code>\$\rho\$</code>	ρ	<code>\$\varrho\$</code>	ϱ	<code>\$\sigma\$</code>	σ	<code>\$\varsigma\$</code>	ς
<code>\$\tau\$</code>	τ	<code>\$\phi\$</code>	ϕ	<code>\$\varphi\$</code>	φ	<code>\$\chi\$</code>	χ
<code>\$\psi\$</code>	ψ	<code>\$\omega\$</code>	ω	<code>\$\upsilon\$</code>	υ		
<code>\$\Gamma\$</code>	Γ	<code>\$\Delta\$</code>	Δ	<code>\$\Theta\$</code>	Θ	<code>\$\Lambda\$</code>	Λ
<code>\$\Xi\$</code>	Ξ	<code>\$\Pi\$</code>	Π	<code>\$\Sigma\$</code>	Σ	<code>\$\Phi\$</code>	Φ
<code>\$\Psi\$</code>	Ψ	<code>\$\Omega\$</code>	Ω				

- **Schriftfonts**

bold	<code>\bf</code>	bold
emphasised	<code>\em</code>	<i>emphasised</i>
italicised	<code>\it</code>	<i>italicised</i>
slanted	<code>\sl</code>	<i>slanted</i>
standard roman typeface	<code>\rm</code>	standard roman typeface
small caps	<code>\sc</code>	SMALL CAPS
Small Caps	<code>\sc</code>	SMALL CAPS
imitate a typewriter	<code>\tt</code>	imitate a typewriter
	<code>\verb</code>	imitate a typewriter
sanf serif	<code>\sf</code>	SANF SERIF
Sanf Serif	<code>\sf</code>	SANF SERIF
Calligraphic	<code>\cal</code>	Calligraphic
	<code>\$_cal\$</code>	<i>CALLIGRAPHIC</i>
math italics	<code>\mit</code>	MATH ITALICS
Math Italics	<code>\mit</code>	MATH ITALICS

Der Stil für die calligraphische Schrift ist nur sinnvoll im mathematischen Modus bei Anwendung auf Großbuchstaben, z.B. $\mathcal{O}(n^2)$ mittels `$_cal 0$(n^2)$`.

- **Spezielle Zeichen**

Backslash	<code>\$_backslash\$</code>	<code>\Verz1\Verz2</code>
und	<code>\&</code>	<code>&</code>
Dollar	<code>\\$</code>	<code>\$</code>
Prozent	<code>\%</code>	<code>%</code>
Unterstrich	<code>_</code>	<code>TU_Ilmenau</code>
Geschweifte Klammern	<code>\{ \}</code>	<code>{braces}</code>
Doppelkreuz	<code>\#</code>	<code>#</code>
pounds	<code>\pounds</code>	<code>£</code>
copyright	<code>\copyright</code>	<code>©</code>
Paragraph	<code>\S</code>	<code>§</code>
P	<code>\P</code>	<code>¶</code>
Kreuz	<code>\dag \$_dagger\$</code>	<code>† †</code>
Kreuze	<code>\ddag \$_ddagger\$</code>	<code>‡ ‡</code>
Inverses Fragezeichen	<code>? ‘</code>	<code>¿</code>
Inverses Ausrufezeichen	<code>! ‘</code>	<code>¡</code>

Horizontale Striche unterschiedlicher Länge erzeugt man mittels eines Gedankenstriches - bzw. dem Aneinanderfügen solcher gemäß `–`, `—` usw.

In einer Zeile kann eine Kommentar stehen. Er beginnt nach dem Kommentarsymbol `%` und geht bis zum Zeilenende.

In Formeln dienen die geschweiften Klammern `{ }` dazu, den Gültigkeitsbereich von Befehlen/Kommandos zu kennzeichnen.

- **Sonder- und mathematische Symbole**

Anwendung im mathematischen Modus.

Unäre und binäre Operationssymbole

<code>\pm</code>	\pm	<code>\mp</code>	\mp	<code>\times</code>	\times
<code>\div</code>	\div	<code>\cdot</code>	\cdot	<code>\wr</code>	\wr
<code>\ast</code>	\ast	<code>\star</code>	\star		
<code>\circ</code>	\circ	<code>\bigcirc</code>	\bigcirc	<code>\bullet</code>	\bullet
<code>\Box</code>	\Box	<code>\diamond</code>	\diamond	<code>\Diamond</code>	\Diamond
<code>\wedge</code>	\wedge	<code>\vee</code>	\vee	<code>\triangle</code>	\triangle
<code>\setminus</code>	\setminus	<code>\backslash</code>	\backslash	<code> </code>	$ $
<code>\cap</code>	\cap	<code>\sqcap</code>	\sqcap		
<code>\cup</code>	\cup	<code>\sqcup</code>	\sqcup	<code>\amalg</code>	\amalg
<code>\lhd</code>	\lhd	<code>\unlhd</code>	\unlhd		
<code>\rhd</code>	\rhd	<code>\unrhd</code>	\unrhd		
<code>\odot</code>	\odot	<code>\oplus</code>	\oplus	<code>\ominus</code>	\ominus
<code>\otimes</code>	\otimes	<code>\oslash</code>	\oslash	<code>\uplus</code>	\uplus
<code>\bigtriangleup</code>	\bigtriangleup	<code>\triangleleft</code>	\triangleleft	<code>\dagger</code>	\dagger
<code>\bigtriangledown</code>	\bigtriangledown	<code>\triangleright</code>	\triangleright	<code>\ddagger</code>	\ddagger

Untereinanderschreiben von zwei Symbolen oder Zeichen mittels

`\stackrel{\#1}{\#2}`, `\stackrel{\#1}{\#2}` oder `\stackrel{\#1}{\#2}`

(z.B. Anwendung bei Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$).

Bei `\stackrel` wird das obere von beiden Symbolen verkleinert dargestellt.

Im Gegensatz zu `\stackrel` werden bei `\choose` die runden Klammern automatisch gesetzt.

<code>\stackrel{\triangle}{=}</code>	\triangle
<code>\stackrel{\wedge}{=}</code>	\wedge
<code>\stackrel{\cdot}{=}</code>	\cdot
<code>\stackrel{-}{\vee}</code>	\vee
<code>\stackrel{\sim}{-}</code>	\sim
<code>\left(\stackrel{n}{k}\right)</code>	$\binom{n}{k}$
<code>\stackrel{-}{\vee}</code>	\vee
<code>\stackrel{n}{k}</code>	$\binom{n}{k}$
<code>\left(\stackrel{n}{k}\right)</code>	$\binom{n}{k}$
<code>\stackrel{n}{k}</code>	$\binom{n}{k}$

Vergleichssymbole

<code>\$<\$</code>	$<$	<code>\$=\$</code>	$=$	<code>\$>\$</code>	$>$
<code>\$\le\$</code>	\leq	<code>\$\ge\$</code>	\geq	<code>\$\neq\$</code>	\neq
<code>\$\ll\$</code>	\ll	<code>\$\gg\$</code>	\gg	<code>\$\doteq\$</code>	\doteq
<code>\$\sim\$</code>	\sim	<code>\$\simeq\$</code>	\simeq	<code>\$\asymp\$</code>	\asymp
<code>\$\subset\$</code>	\subset	<code>\$\supset\$</code>	\supset	<code>\$\approx\$</code>	\approx
<code>\$\subseteq\$</code>	\subseteq	<code>\$\supseteq\$</code>	\supseteq	<code>\$\cong\$</code>	\cong
<code>\$\sqsubset\$</code>	\sqsubset	<code>\$\sqsupset\$</code>	\sqsupset	<code>\$\equiv\$</code>	\equiv
<code>\$\sqsubseteq\$</code>	\sqsubseteq	<code>\$\sqsupseteq\$</code>	\sqsupseteq	<code>\$\propto\$</code>	\propto
<code>\$\in\$</code>	\in	<code>\$\ni\$</code>	\ni	<code>\$\notin\$</code>	\notin
<code>\$\vdash\$</code>	\vdash	<code>\$\dashv\$</code>	\dashv	<code>\$\prec\$</code>	\prec
<code>\$\top\$</code>	\top	<code>\$\perp\$</code>	\perp	<code>\$\preceq\$</code>	\preceq
<code>\$\smile\$</code>	\smile	<code>\$\mid\$</code>	\mid	<code>\$\parallel\$</code>	\parallel
<code>\$\frown\$</code>	\frown	<code>\$\bowtie\$</code>	\bowtie	<code>\$\Join\$</code>	\Join
<code>\$\succ\$</code>	\succ	<code>\$\succeq\$</code>	\succeq	<code>\$\models\$</code>	\models

Negieren durch Voranstellen von `\not`.

<code>\$\not<\$</code>	$\not<$	<code>\$\not=\$</code>	$\not=$	<code>\$\not>\$</code>	$\not>$
<code>\$\not\subset\$</code>	$\not\subset$	<code>\$\not\parallel\$</code>	$\not\parallel$	<code>\$\not\parallel\$</code>	$\not\parallel$
<code>\$\not\ni\$</code>	$\not\ni$	<code>\$\not\mid\$</code>	$\not\mid$	<code>\$\not\sim\$</code>	$\not\sim$

Pfeil- und Zeigersymbole

Sie unterscheiden sich i.a. nach Richtung `left`, `right`, `up`, `down` und Himmelsrichtung, Größe (einfach, doppelt) `left`, `Left`, Länge `long`, `Long` sowie speziellen Formen.

Ausgewählte Symbole.

<code>\$\leftarrow\$</code>	\leftarrow	<code>\$\Leftarrow\$</code>	\Leftarrow
<code>\$\longleftarrow\$</code>	\longleftarrow	<code>\$\Longleftarrow\$</code>	\Longleftarrow
<code>\$\leftrightarrows\$</code>	\leftrightarrows		
<code>\$\uparrow\$</code>	\uparrow	<code>\$\Uparrow\$</code>	\Uparrow
<code>\$\rightarrow\$</code>	\rightarrow	<code>\$\mapsto\$</code>	\mapsto
<code>\$\leadsto\$</code>	\leadsto		
<code>\$\nearrow\$</code>	\nearrow	<code>\$\searrow\$</code>	\searrow
<code>\$\swarrow\$</code>	\swarrow	<code>\$\nwarrow\$</code>	\nwarrow
<code>\$\hookleftarrow\$</code>	\hookleftarrow	<code>\$\leftharpoonup\$</code>	\leftharpoonup

Sonstige mathematische Symbole.

Einige zu vermutende Symbole gibt es jedoch nicht, dort wurde absichtlich der Platz leergelassen.

<code>\cap</code>	\cap	<code>\bigcap</code>	\bigcap	<code>\cup</code>	\cup	<code>\bigcup</code>	\bigcup
<code>\sqcap</code>	\sqcap	<code>\bigsqcap</code>	\bigsqcap	<code>\sqcup</code>	\sqcup	<code>\bigsqcup</code>	\bigsqcup
<code>\wedge</code>	\wedge	<code>\bigwedge</code>	\bigwedge	<code>\vee</code>	\vee	<code>\bigvee</code>	\bigvee
<code>\odot</code>	\odot	<code>\bigodot</code>	\bigodot	<code>\otimes</code>	\otimes	<code>\bigotimes</code>	\bigotimes
<code>\oplus</code>	\oplus	<code>\bigoplus</code>	\bigoplus	<code>\ominus</code>	\ominus	<code>\bigominus</code>	\bigominus
<code>\oslash</code>	\oslash	<code>\bigoslash</code>	\bigoslash	<code>\uplus</code>	\uplus	<code>\biguplus</code>	\biguplus
<code>\diamond</code>	\diamond	<code>\Diamond</code>	\Diamond	<code>\circ</code>	\circ	<code>\bigcirc</code>	\bigcirc
<code>\triangle</code>	\triangle	<code>\Triangle</code>	\triangle	<code>\box</code>		<code>\Box</code>	\square

<code>\sum</code>	\sum	<code>\int</code>	\int	<code>\oint</code>	\oint
<code>\prod</code>	\prod	<code>\coprod</code>	\coprod	<code>\infty</code>	∞
<code>\aleph</code>	\aleph	<code>\surd</code>	\surd	<code>\ell</code>	ℓ
<code>\wp</code>	\wp	<code>\angle</code>	\angle	<code>\l</code>	\l
<code>\partial</code>	∂	<code>\nabla</code>	∇	<code>\hbar</code>	\hbar
<code>\imath</code>	\imath	<code>\jmath</code>	\jmath		
<code>\Re</code>	\Re	<code>\Im</code>	\Im		
<code>\mho</code>	\mho	<code>\neg</code>	\neg	<code>\prime</code>	\prime
<code>\flat</code>	\flat	<code>\sharp</code>	\sharp	<code>\natural</code>	\natural
<code>\exists</code>	\exists	<code>\forall</code>	\forall	<code>\emptyset</code>	\emptyset
<code>\clubsuit</code>	\clubsuit	<code>\spadesuit</code>	\spadesuit	<code>\heartsuit</code>	\heartsuit
<code>\diamondsuit</code>	\diamondsuit				

• Newcommand

Anwendung einiger oft gebräuchlicher Kommandokürzel.

```

\newcommand{\be}{\begin{enumerate}}
\newcommand{\ee}{\end{enumerate}}
\newcommand{\bq}{\begin{quote}}
\newcommand{\eq}{\end{quote}}
\newcommand{\bi}{\begin{itemize}}
\newcommand{\ei}{\end{itemize}}
\newcommand{\s}{\scriptstyle}
\newcommand{\ts}{\displaystyle}
\newcommand{\sbf}{\small\bf}
\newcommand{\hnf}{\hspace*{0.5cm}}

\newcommand{\ul}[1]{\underline{#1}}
\newcommand{\ol}[1]{\mbox{$\overline{#1}$}}

```

```

\newcommand{\ig}[2]{\mbox{$\int\limits^{\#2}_{\#1}$}}
\newcommand{\li}[2]{\mbox{$\lim\limits_{\#1\to\#2}$}}
\newcommand{\su}[3]{\mbox{$\sum\limits^{\#3}_{\#1=\#2}$}}
\newcommand{\summ}[4]{\mbox{$\sum\limits^{\#3}_{\#1=\#2}\atop\#1\ne\#4$}}
\newcommand{\vek}[2]{\mbox{$(\#1_1,\ldots,\#1_{\#2})$}}
\newcommand{\vekt}[3]{\mbox{$(\#1_{\#2},\ldots,\#1_{\#3})$}}
\newcommand{\vektto}[3]{\mbox{$(\#1_1,\#1_2,\ldots,\#1_{\#2})^T$}}
\newcommand{\pro}[3]{\mbox{$\prod\limits^{\#3}_{\#1=\#2}$}}
\newcommand{\prou}[4]{\mbox{$\prod\limits^{\#4}_{\#1,\#2=\#3}$}}
\newcommand{\betr}[1]{\mbox{$\left|\#1\right|$}}
\newcommand{\norm}[1]{\mbox{$\|\#1\|$}}
\newcommand{\mnorm}[2]{\mbox{$\|\#1\|_{\#2}$}}
\newcommand{\bino}[2]{\mbox{$\left(\#1\atop\#2\right)$}}
\newcommand{\binom}[2]{\mbox{$\#1\choose\#2$}}
\newcommand{\Dxa}[2]{\mbox{$\ts\frac{\partial\#1}{\partial\#2}$}}
\newcommand{\Dx}[1]{\mbox{$\ts\frac{\partial}{\partial\phantom{}}\{\partial\#1\}$}}
% Platzhalter in {} nach \phantom
\newcommand{\diag}[2]{\mbox{$\diag(\#1_1,\#1_2,\ldots,\#1_{\#2})$}}
\newfont{\kf}{cmbxti10 scaled 1200} % kursiv fett, Standard

```

$\underline{\varphi}, \quad \underline{\varphi}, \quad \overline{r}$

$$\int\limits_a^b f(x) \, dx, \quad \int\limits_a^b \int\limits_c^d g(x,y) \, dx dy, \quad \int s(t) \, dt$$

$$\int\limits_0^{\infty} x e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x^i, \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n a_{ij} x_j$$

$$(x_1,\ldots,x_n), \quad (y_k,\ldots,y_l), \quad (\gamma_{-2},\ldots,\gamma_2)^T, \quad \mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_m)^T$$

$$\prod_{k=1}^m z_k, \quad \prod_{i,j=1}^m \alpha_{ij}$$

$$|x|, \quad \|y\|, \quad \|A\|_\infty, \quad \|z\|_2$$

$$\binom{n}{k}, \quad \binom{n+1}{i-1}, \quad \binom{n+k+1}{i-1}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

$$z=y^TAx, \quad A\in\mathbb{R}^{m,n}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}z(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^m a_{ji}y_j, \quad i=1,2,\ldots,n$$

$$D=diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}, \quad \mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,n}, \quad \mathbf{x},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$$

5.2 Formeln

• Einfache Formeln

Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Diskretisierungsformel

Anwendung von $\underbrace{\quad}_{\varphi_j}$

$$-\frac{1}{h} \left(\underbrace{k_{j+\frac{1}{2}}}_{a_{j+1}} \frac{Y_{j+1} - Y_j}{h} - \underbrace{k_{j-\frac{1}{2}}}_{a_j} \frac{Y_j - Y_{j-1}}{h} \right) + Y_{j-\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} q dx}_{d_j} = \underbrace{\frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f dx}_{\varphi_j}$$

• Statistikformeln

Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \text{analog } \bar{y}$$

Standardabweichungen

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2, \quad \text{analog } \sigma_y^2$$

Streuungen σ_x, σ_y

Kovarianz

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} (s_{x,y} - n \bar{x} \bar{y})$$

Korrelationskoeffizienten

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right)} = \frac{s_{x,y} - n \bar{x} \bar{y}}{(\|x\|_2^2 - n \bar{x}^2) (\|y\|_2^2 - n \bar{y}^2)}$$

Größe

$$c = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{k=1}^n \left(x_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x} + \|x\|_2^2)^2 \right]^{1/2}$$

5.3 Quelltexte zu den Formeln

```
{\bf Formeln}\[0.4em]
Kronecker-Symbol
\[ \delta_{ij} =
\left\{\begin{array}{ll}
1, & \mbox{falls}~i=j\\
0, & \mbox{falls}~i\neq j
\end{array}\right.
\]
Diskretisierungsformel
\begin{eqnarray*}
& -\frac{1}{h}\Bigl(\underbrace{k_{j+\frac{1}{2}}}_{a_{j+1}} \\
& \frac{Y_{j+1}-Y_j}{h} - \\
& \underbrace{k_{j-\frac{1}{2}}}_{a_j} \frac{Y_j - Y_{j-1}}{h} \Bigr) + Y_{j-\frac{1}{2}} \\
& \underbrace{\frac{1}{h} \int \limits_{x_{j-1}}^{x_j} q(x) dx}_{d_j} = \\
& \underbrace{\frac{1}{h} \int \limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx}_{\varphi_j}
\end{eqnarray*}

{\bf Statistikformeln}\[0.4em]
Mittelwert\[0.4em]
$ \ol{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \sim \mbox{analog} \ol{y} \$\[0.8em]
Standardabweichungen\[0.4em]
$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \ol{x})^2 = \\
\frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \ol{x}^2 \right) - \frac{n}{n-1} \ol{x}^2$, \
analog $\sigma_y^2$\[0.8em]
Streuungen $\sim \sigma_x, \sigma_y$\[0.8em]
Kovarianz
\[ \sigma_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \ol{x})(y_i - \ol{y}) = \\
\frac{1}{n-1} (s_{x,y} - n \ol{x} \ol{y})
\]
Korrelationskoeffizienten
\[ r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \ol{x} \ol{y}}{
\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \ol{x}^2 \right)
\left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \ol{y}^2 \right) } \\
= \frac{s_{x,y} - n \ol{x} \ol{y}}{
\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \ol{x}^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \ol{y}^2 \right) }
\]
Gr"o"se\[0.6em]
$c = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{k=1}^n \left( x_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^2 \right)^{1/2} \\
= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{k=1}^n \left( x_k - \ol{x} + \sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^2 \right)^{1/2}$
```

6 Hinweise zu den Skriptfiles

Die TeX-Quelltexte (ASCII-Code) der einzelnen Abschnitte stehen als Files zu Verfügung.

Abschnitt	File
Rahmen; 1. Einleitung	HINW1.TEX
2. Matrizen, Vektoren	HINW2.TEX
3. Tabellen, Tableaus	HINW3.TEX, HINW31.TEX
4. Schemata	HINW4.TEX
5. Symbole, Formeln; 6. Hinweise zu den Skriptfiles	HINW5.TEX

Dateien im Novell-Netz des IfMath bzw. auf Neundorfs Homepage

\\PIVOT\SHARE Q:\NEUNDORF\STUD_M93\HINWEIS

Homepage Navigator → WWW → Hinweis

Homepage: http://imath.mathematik.tu-ilmenau.de/~neundorf/index_de.html

Literatur

- [1] Griffith, D.F.; Higham, D.J.: *A \LaTeX Guide*. Computer Science Report 94/01. Dep. of Mathematics and Computer, Science University of Dundee Scotland.
- [2] Borde, A.: *\TeX by Example*. Academic Press, 1992.
- [3] Diller, A.: *\LaTeX line by line: tips and techniques for documents processing*. John Wiley, 1993.
- [4] Goossens, A.; Mittlebach, F.; Samarin, A.: *The \LaTeX companion*. Addison-Wesley, 1994.
- [5] Gratzer, G.: *Math into \TeX : a simple introduction to AMS- \LaTeX* . Birkhäuser, 1993.
- [6] Higham, D.J.: *Handbook of Writing for the Mathematical Sciences*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993.
- [7] Higham, D.J.: *Bibter: A versatile tool for \LaTeX users*. SIAM News, 27(1) 10, January 1994.
- [8] Johnstone, A.: *\LaTeX , concisely*. Ellis Horwood, 1992.
- [9] Knuth, D.E.: *The \TeX book*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.
- [10] Lamport, L.: *\LaTeX . A Document Preparation System, User's Guide and Reference Manual*. Addison-Wesley Publishing Company 1985.
- [11] Lamport, L.: *\LaTeX : A Document Preparation System*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1986.
- [12] Teagle, F.: *The \LaTeX Cookbook*. Technical Report ETR 7/91, Engineering Applications Support Environment, 1991.
- [13] Wonnenberger, R.: *Kompaktführer \LaTeX* . Addison-Wesley 1987.
- [14] Schwarz, N.: *Einführung in \TeX* . Addison-Wesley 1987.
- [15] Hofmann, T.: *\LaTeX Erweiterungen und Modifikationen*. CIBA-GEIGY AG Basel 1987.

Anschrift:

Dr. Werner Neundorf
Technische Universität Ilmenau, Institut für Mathematik
PF 10 0565
D - 98684 Ilmenau

e-mail : neundorf@mathematik.tu-ilmenau.de